Rahmetli Hocalarım

Prof. Dr. Berki YURTSEVER

Prof. Dr. Cengiz ULUÇAY

Prof. Dr. Saffet SÜRAY'ın

anısına

İÇİNDEKİLER

0 ÖNBİLGİLER

1 FONKSİYONLAR

2 LİMİT VE SÜREKLİLİK

0 ÖNBİLGİLER

Bu bölümde, öğrencilerin orta öğretimde gördüğü bazı konuların kısa bir özeti verilecektir. Böylece öğrenci, öğrenememiş veya unutmuş olduğu kavramları öğrenme veya hatırlama imkanına kavuşmuş olacaktır.

0.1 KÜMELER

Kesin bir tanımı yapılamamakla beraber, sezgisel olarak, küme bazı özelliklere sahip nesnelerin bir topluluğu, bir sınıfı, bir kolleksiyonu olarak düşünülebilir. Kümeyi meydana getiren nesnelere kümenin elemanları adı verilir. Bu kitapta gözönüne alınacak kümelerin hemen hepsi, elemanları sayılar olan kümelerdir. Kümeler, genellikle $A, B, C, X, Y,\ldots$ gibi büyük harflerle, elemanları da $a, b, c, x, y, \ldots$ gibi küçük harflerle gösterilir. a bir A kümesinin bir elemanı ise, bu

$$a \in A$$

biçiminde gösterilir. Eğer b, A kümesinin elemanı değilse bu da

$$b \notin B$$

biçiminde yazılır.

Bir kümenin verilmesi için o kümenin elemanlarının teker teker belirtilmesi veya o kümenin elemanlarının belirtilmesine yarayan karakteristik özelliğinin verilmesi gerekir. Buna göre, bir küme ya o kümenin elemanlarını { ...... } parantezi içine yazmakla, ya da

$$\{x : (x \text{ in karakteristik özelliği})\}$$

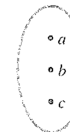
biçiminde gösterilir. Örneğin elemanları 1, 2, 3 olan küme

$$\{1, 2, 3\}$$

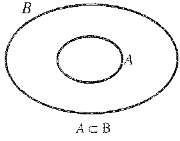
ile, Türk alfabesinin harfleri kümesi

$$\{x : x \text{ Türk alfabesinin bir harfi}\}$$

ile gösterilebilir. Bu yazışta kümenin genel elemanı x harfiyle gösterilmiş, " : " işareti de "öyle ki" anlamına gelen bir sembol olarak kullanılmıştır.



Kolaylık sağlamak amacıyla, bazen kümeleri bir bölge içinde kalan noktalar ile göstermek adet olmuştur. Bu şekillere Venn diyagramları adı verilir. $\{a, b, c\}$ kümesinin Venn diyagramı yanda verilmiştir.



$A \subset B$

TANIM

Bir A kümesinin herbir elemanı B kümesinin de bir elemanı ise, A kümesi B nin bir **alt kümesidir** denir ve $A \subset B$ biçiminde gösterilir. Yani

$$A \subset B \Leftrightarrow [x \in A \Rightarrow x \in B]$$

ÖRNEK :

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ve $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ise

$A \subset B$ dir. zira A nın herbir elemanı B nin de bir elemanıdır.

TANIM

Eğer $A \subset B$ ve $B \subset A$ ise, A ile B kümeleri **eşittir** denir. $A = B$ biçiminde gösterilir. A kümesinin en az bir elemanı B de değilse veya B nin en az bir elemanı A da değilse A ile B **farklıdır** denir, $A \neq B$ şeklinde gösterilir.

Bu tanıma göre A ile B eşit kümeler ise aynı elemanlardan meydana gelmişlerdir.

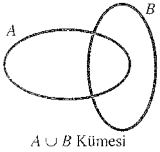
TANIM

Eğer $A \subset B$ ve $A \neq B$ ise, A kümesine B nin bir **özalt kümesidir** denir.

TANIM

Hiçbir elemanı olmayan kümeye **boş küme** denir ve $\varnothing$ ile gösterilir.

Boş küme her kümenin bir alt kümesidir. Zira $\varnothing$ de bulunup diğer kümelerde bulunmayan bir eleman yoktur.



$A \cup B$ Kümesi

TANIM

A ve B kümelerinin tüm elemanlarının oluşturduğu kümeye, A ile B kümesinin **birleşimi** denir, $A \cup B$ ile gösterilir. Buna göre,

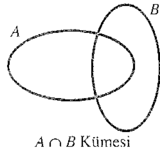
$$A \cup B = \{x : \ x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

olacaktır.

Yukarıdaki şekilden de kolayca görüleceği gibi,

$$A \subset A \cup B \text{ ve } B \subset A \cup B$$

dir.



$A \cap B$ Kümesi

TANIM

A ve B kümelerinin ortak elemanlarından oluşan kümeye A ile B kümesinin **arakesiti** veya **kesişimi** denir, $A \cap B$ ile gösterilir. Buna göre,

$$A \cap B = \{x : \ x \in A \text{ ve } x \in B\}$$

olur.

Yukarıdaki tanım gözönüne alındığında,

$$A \cap B \subset A \quad \text{ve} \quad A \cap B \subset B$$

olduğu kolayca görülebilir.

Ayrık kümeler

TANIM

$A \cap B = \varnothing$ ise, A ve B kümeleri **ayrıktır** denir.

Buna göre iki küme ayrık ise bu kümelerin ortak elemanı olmaz.

$A \setminus B$ Kümesi

TANIM

A kümesinde olup da B de bulunmayan elemanların kümesine B nin A kümesine göre **tümleyeni** denir. $A \setminus B$ ile gösterilir.

Buna göre,

$$A \setminus B = \{x : \ x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$

dır. Küme teorisinin herhangi bir uygulamasında uğraşılan tüm kümeler bir sabit kümenin alt kümeleri olarak düşünülebilir. Bu kümeye **evrensel küme** denir.

A^{I} Kümesi

TANIM

Bir A kümesinin E evrensel kümesine göre tümleyenine A kümesinin **tümleyeni** denir. A^{I} ile gösterilir. Buna göre,

$$A^{I} = \{x : \ x \notin A\}$$

dir.

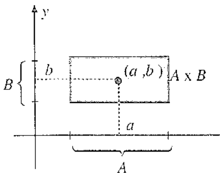
Sonlu sayıda elemanı olan kümenin eleman sayısı $s(A)$ veya $n(A)$ ile gösterilir. $A \cup B$ kümesinin tanımı gözönüne alındığında

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Bu eşitlikten yararlanarak

$$\begin{aligned} s(A \cup B \cup C) &= s(A \cup B) + s(C) - s\,[(A \cup B) \cap C] \\ &= s(A \cup B) + s(C) - s[(A \cap C) \cup (B \cap C)\ ] \\ &= s(A \cup B) + s(C) - [s(A \cap C) + s(B \cap C) - s(A \cap B \cap C)] \\ &= s(A) + s(B) + s(C) - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) + s(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

bulunur.



TANIM

A ve B kümelerinin **kartezyen çarpımı**, $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere, tüm sıralı (a, b) ikililerinin kümesidir. Buna göre,

$$A \times B = \{\ (a, b) : \ a \in A \text{ ve } b \in B\}$$

dir.

Bu küme yandaki şekilde gösterilmiştir. A x B kümesi için,

$$s(A \times B) = s(A) \, . \, s(B)$$

olur.

0.2 SAYILAR

İnsanların öğrenme sürecinde algılamaya başladığı kavramlardan biri de sayılardır. Bütün bilim dallarının gelişmesinde kaçınılmaz şekilde kullanılan matematik, en basit tanımı ile, insanların sayılarla uğraşmasından başka birşey değildir. Deneye dayanan bütün bulguların da ancak sayılarla ifade edildikleri zaman bir değer kazanacağını hepimiz biliriz. Hayatımızın her anında nasıl sorusu yanında ne kadar sorusunun da aynı derecede öneme sahip olduğunu hatırlayacak olursak, sayıların vazgeçilmez kavramlar olarak bizimle beraber olduklarını anlarız.

Biz bu bölümde reel sayıların kısa bir özetini verecek, daha sonra lineer nokta kümelerinin özelliklerini inceleyeceğiz.

0.2.1 Reel Sayılar

Herhangi bir teori kurulurken bu teorinin dayanacağı bazı temel kavramlara ihtiyaç vardır. Yani başta bazı şeyler kabul edilerek diğer kavram ve teoriler bunların üzerine kurulur. Sayılar teorisinin gelişmesinde bu temel kavramlardan biri de Doğal Sayılar kavramıdır. Bilindiği gibi,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$$

kümesine doğal sayılar kümesi *, bu kümenin elemanları olan 1,2,3 ... sayılarına da doğal sayılar adı verilmektedir.

Matematikte karşımıza çıkabilecek bütün problemleri bu sayılar ile çözmek mümkün değildir. Örneğin $x + 2 = 1$ denkleminin doğal sayılar kümesinde bir çözümü yoktur. Başka bir deyişle bu denklemin kökü bir doğal sayı değildir. Çünkü x yerine 1, 2, 3, ... sayılarından hangisini koyarsanız koyun denklem sağlanmaz. Bu sebeple doğal sayılar kümesi, m ve n doğal sayılar olmak üzere,

$$x + m = n$$

tipindeki denklemlerin köklerini de içerecek şekilde genişletilmiş ve tam sayılar kümesi denilen

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

kümesi elde edilmiştir. Demek ki tamsayılar kümesi doğal sayılara bu sayıların negatifleri ile sıfırın katılmasıyla elde edilmiştir.

Tam sayılar kümesi de bütün ihtiyaçlarımıza cevap veremez. Örneğin p ve q birer tamsayı olmak üzere $(x \neq 0)$,

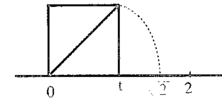
* Bazı kaynaklar sıfır sayısını da doğal sayılara katarlar.

$$qx = p$$

şeklindeki bir denklemin kökü bir tamsayı olmayabilir. Bu nedenle tamsayılar kümesi $qx = p$ tipindeki tüm denklemlerin köklerini de ihtiva edecek şekilde genişletilmiş ve bu kümeye rasyonel sayılar kümesi adı verilmiştir. $qx = p$ tipindeki denklemlerin kökleri p/q şeklinde olduklarından rasyonel sayılar p/q şeklinde yazılabilen sayılardır. Şu halde, rasyonel sayılar kümesini Q ile gösterecek olursak

$$Q = \left\{ \frac{p}{q} : \; p, q \in Z \text{ ve } q \neq 0 \right\}$$

olur. İki tamsayının ± 1 den başka ortak böleni yoksa bu iki sayıya aralarında asaldırlar denir. c sıfırdan farklı bir tamsayı olmak üzere, $\frac{p}{q} = \frac{cp}{cq}$ olduğundan yukarıdaki p ile q sayıları aralarında asal kabul edilecektir. Aksi takdirde Q kümesinde birbirine eşit sonsuz çoklukta eleman bulunur. Diğer taraftan her m tamsayısı, $m/1$ şeklinde yazılabildiğinden, bir rasyonel sayıdır. Demek ki Q rasyonel sayılar kümesi Z tamsayılar kümesini kapsar.



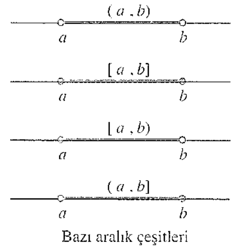
Bir kenarının uzunluğu 1 birim olan karenin köşegeninin uzunluğu $\sqrt{2}$ birimdir. Şimdi bu $\sqrt{2}$ sayısının bir rasyonel sayı olup olmadığını araştıralım. $\sqrt{2}$ sayısının rasyonel olduğunu göstermek için bunun p/q şeklinde yazılabildiğini göstermek gerekir. Kabul edelim ki $\sqrt{2}$ rasyoneldir. O halde p ve q aralarında asal olmak üzere $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ biçiminde yazılabilir. Her iki tarafın karesi alınır ve q^2 ile çarpılırsa $2q^2 = p^2$ bulunur. Birinci taraf çift sayı olduğundan ikinci taraf, yani p^2 de çifttir. Dolayısıyla p çifttir. O halde r bir tamsayı olmak üzere $p = 2r$ yazılabilir. O zaman $2q^2 = (2r)^2$, buradan da $q^2 = 2r^2$ bulunur ki bu q^2 nin ve dolayısıyla q nun çift olduğunu gösterir. Hem p hem de q çift olduğundan 2 sayısı bunların bir ortak bölenidir. Halbuki biz p ve q sayılarını aralarında asal kabul etmiştik. Bu bir çelişmedir. O halde $\sqrt{2}$ sayısı rasyonel değildir. Rasyonel olmayan bu sayılara irrasyonel sayılar adı verilir. Rasyonel ve irrasyonel sayıların hepsine birden reel sayılar denir. Reel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ ile gösterilir. Yukarıdaki tanımlar gözönüne alındığında sayı kümeleri arasında

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

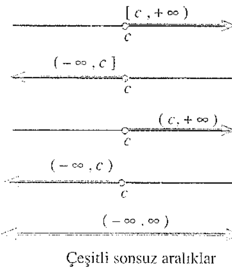
bağıntılarının bulunduğu açıkça görülür.

Bilindiği gibi her bir reel sayıya sayı doğrusu üzerinde bunu absis olarak kabul eden bir tek nokta ve her bir noktaya absis olarak bir tek reel sayı karşılık gelir. Bu nedenle elemanları reel sayılar olan kümelere lineer nokta kümeleri adı verilir.

Bu kesimde gözönüne alacağımız kümeler lineer nokta kümeleri olacaktır. Bu kümelerin temel özelliklerini bir özet halinde vereceğiz. Lineer nokta kümeleri içinde en çok kullanılanları aralıklardır.



Bazı aralık çeşitleri



Çeşitli sonsuz aralıklar

TANIM

a ve b iki reel sayı ve $a < b$ olsun.

$$\{x \in R : a < x < b\}$$

şeklinde tanımlanan reel sayı kümesine a ve b sayıları ile belirtilen **açık aralık** denir ve (a, b) biçiminde gösterilir. Benzer olarak

$$\{x \in R : a \leq x \leq b\}$$

kümesine **kapalı aralık** adı verilir, $[a, b]$ ile gösterilir.

$$(a, b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$$

kümelerine de **yarı açık aralıklar** adı verilir.

Yukarıdaki aralıkların boyları sabit olup $b - a$ sayısına eşittir. Boyları sonlu olmayan aralıklar da vardır. Bunlara sonsuz aralıklar adı verilir. Bunlardan bazıları yanda gösterilmiştir. Burada c herhangi bir reel sayıdır.

a ve b iki reel sayı olsun. Eğer $a + r = b$ olacak şekilde pozitif bir r sayısı varsa, a sayısı b den küçüktür veya b sayısı a dan büyüktür denir, $a < b$ biçiminde gösterilir.

TEOREM 0.1 :

1) $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2) $a < b \Rightarrow a - c < b - c$
3) $a < b$ ve $c > 0 \Rightarrow a . c < b . c$
4) $a < b$ ve $c < 0 \Rightarrow a . c > b . c$
5) $a < b$ ve $a . b > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

TANIM

Bir a reel sayısının **mutlak değeri**

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \text{ ise} \\ -a, & a < 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $|a|$ sayısıdır.

Yukarıdaki tanıma göre, a ister negatif olsun, ister pozitif olsun, $|a|$ daima pozitiftir. $|0| = 0$ olacağından her a reel sayısı için $|a| \geq 0$ dır. Ayrıca, daima $|a|^2 = a^2$ olacağından

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

yazılabilir. Bu ifadeye mutlak değerin cebirsel tanımı denir.

Bir a sayısının mutlak değeri, o sayının orijin (başlangıç) noktasına olan uzaklığını gösterir.

Mutlak değerin özellikleri aşağıdaki teoremde özetlenmiştir.

TEOREM 0.2 :

Her $a, b \in R$ için,

(1) $|a| \geq 0$

(2) $-|a| \leq a \leq |a|$

(3) $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$ (Üçgen eşitsizliği)

(4) $|a . b| = |a| . |b|$

(5) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$

Aşağıdaki teoremden yararlanarak bazı eşitsizlikler kolayca çözülebilir.

TEOREM 0.3 :

Her pozitif p sayısı için,

1) $|u| = p$ ise, $u = p$ veya $u = -p$
2) $|u| < p \Rightarrow -p < u < p$ dir.
3) $|u| > p \Rightarrow u < -p$ veya $u > p$ dir.

ÖRNEK :

$|2x - 1| \leq 5$ eşitsizliğini çözünüz.

Çözüm :

$$|2x - 1| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq 2x - 1 \leq 5 \Rightarrow$$

$$1 - 5 \leq 2x \leq 5 + 1 \Rightarrow -2 \leq x \leq 3$$

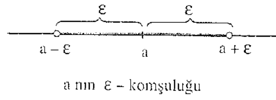
olur.

O halde eşitsizliğin çözüm kümesi

$$C = [-2, 3]$$

kapalı aralığıdır.

Matematikte sıkça kullanılan kavramlardan biri de komşuluk kavramıdır.



a nın ε - komşuluğu

> **TANIM**
>
> ε bir pozitif sayı olsun.
>
> $K = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon \} = (a - \varepsilon \ , a + \varepsilon)$
>
> kümesine a noktasının ε-komşuluğu denir.

ÖRNEK :

2 sayısının $\frac{1}{100}$ komşuluğunu bulunuz.

Çözüm :

$$K = \left(2 - \frac{1}{100},\ 2 + \frac{1}{100}\right) = \left(\frac{199}{100},\ \frac{201}{100}\right)$$

olur.

> **TANIM**
>
> Bir a reel sayısından büyük olmayan tamsayıların en büyüğüne a sayısının tam kısmı* denir ve $[\![a]\!]$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanıma göre, $[\![3,4]\!] = 3$, $[\![5]\!] = 5$, $[\![-3,6]\!] = -4$ $[\![\sqrt{2}]\!] = 1$

olacaktır.

Örneklerden de görüleceği gibi, her a sayısı, onun $[\![a]\!]$ tam kısmı ile, $0 \le k < 1$ özelliğini sağlayan, kesir kısmının toplamı olarak yazılabilir, yani

$$a = [\![a]\!] + k \qquad (0 \le k < 1)$$

olarak yazılabilir. Örneğin

$$3,41 = 3 + 0,41$$
$$5 = 5 + 0$$
$$-3,6 = -4 + 0,4$$
$$\sqrt{2} = 1 + 0,41 \ldots$$

yazılabilir. a bir tamsayı olduğunda $k = 0$, diğer hallerde $0 < k < 1$ dir.

ÖRNEK :

$4.[\![3,6]\!]$ ve $[\![4.(3,6)]\!]$ sayılarını hesaplayınız. Her n tamsayısı için,

$$n.[\![a]\!] = [\![n.a]\!]$$

eşitliği doğru mudur?

* Bazı kaynaklar "tam kısım" yerine "tam değer" deyimini de kullanırlar.

Çözüm :

$4.[\![3.6]\!] = 4.3 = 12$ ve $[\![4.(3,6)]\!] = [\![14,4]\!] = 14$ olduğundan,

$4.[\![3.6]\!] \neq [\![4.(3,6)]\!]$

dır. Şu halde $n.[\![a]\!] = [\![n.a]\!]$ eşitliği bazı durumlarda doğru olmaz.

Tam kısım ile ilgili temel özellikler aşağıdaki teoremde verilmiştir.

> **TEOREM 0.4 :**
>
> (1) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için,
>
> $[\![a + b]\!] \ge [\![a]\!] + [\![b]\!]$
>
> (2) Her $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ için,
>
> $[\![a + m]\!] = [\![a]\!] + m$

ÖRNEK :

$[\![2x + 3]\!] < 8$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm :

$[\![2x + 3]\!] \le 8 \Rightarrow [\![2x]\!] + 3 \le 8 \Rightarrow$

$[\![2x]\!] \le 5 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3$

olur.

0.3 ÜSLÜ VE KÖKLÜ ÇOKLUKLAR

a herhangi bir sayı ve n herhangi bir pozitif tamsayı olsun.

$$\underbrace{a.a.\ldots.a}_{n \text{ tane } a}$$

çarpımına a nın n– inci kuvveti denir, a^n biçiminde gösterilir. $a \neq 0$ olmak üzere, a^{-n} ve a^0 aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \qquad a^0 = 1$$

Buna göre,

$$3^4 = 3.3.3.3 = 81$$
$$(-2)^3 = (-2).(-2).(-2) = -8$$
$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5.5} = \frac{1}{25},$$
$$8^0 = 1$$

olur.

Reel sayıların pozitif tam kuvvetlerinin temel özellikleri aşağıdaki teoremde sıralanmıştır. Bunların ispatı kuvvet tanımından kolayca elde edilir.

TEOREM 0.5 :

$a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ için,

(1) $a^m . a^n = a^{m+n}$

(2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$

(3) $(a^m)^n = a^{m.n}$

(4) $(a.b)^n = a^n . b^n$

Eğer $a \geq 0$ ise, karesi a olan bir tek pozitif sayı vardır. a nın karekökü denilen bu sayı $\sqrt{a}$ ile gösterilir. Böylece

$$\sqrt{4} = 2, \quad \sqrt{16} = 4, \quad \sqrt{0} = 0, \quad \sqrt{9} = 3$$

olacaktır. $(-2)^2 = 4$ olduğu halde $\sqrt{4} \neq -2$ dir, zira karekök pozitif tanımlıdır.

Negatif sayıların karekökü bir reel sayı olamaz. Çünkü reel sayıların karesi negatif olamaz.

Genel olarak, $a \geq 0$ ve n herhangi bir pozitif tamsayı olmak üzere, n– inci kuvveti a olan bir tek pozitif reel sayı vardır. a nın n –ıncı kuvvetten kökü denilen bu sayı $\sqrt[n]{a}$ ile gösterilir. Örneğin,

$$\sqrt[3]{8} = 2 \ , \ \sqrt[5]{0} = 0 \ , \ \sqrt[4]{16} = 2$$

olur. Kök tanımından yararlanarak, aşağıdaki teorem kolayca ispatlanabilir.

TEOREM 0.6 :

$a, b \in \mathbb{R}^+$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ için,

(1) $\sqrt[n]{a^n} = a$

(2) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b}$

(3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)$

(4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

Eğer n tek sayı ise, a nın negatif değerleri için de $\sqrt[n]{a}$ tanımlanabilir. Bu durumda $\sqrt[n]{a}$, n– ninci kuvveti a olan bir negatif sayıdır.

Örneğin;

$$\sqrt[3]{-8} = -2 \ , \ \sqrt[5]{-32} = -2 \ , \ \sqrt[7]{-1} = -1$$

dır.

ÖRNEK : $0 < a < b$ için, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

$0 < a < b$ olduğundan $b - a > 0$ dır.

$A = \sqrt{a}$, $B = \sqrt{b}$ diyelim. $A > 0$ ve $B > 0$ dır.

$B^2 - A^2 = (B - A)(B + A) > 0$

dır. $A + B > 0$ ve $B^2 - A^2 > 0$ dır. Dolayısıyla $B - A > 0$ olur.

Bu $B > A$, dolayısıyla $\sqrt{b} > \sqrt{a}$ olmasını gerektirir.

Son olarak r bir rasyonel sayı olmak üzere a^r sayısına bir anlam vermeye çalışalım. r rasyonel olduğundan $r = \dfrac{m}{n}$ olacak şekilde m ve n tamsayıları vardır.

Genellikle birşey kaybetmeksizin, n nin pozitif olduğunu kabul edebiliriz. Eğer r negatif ise, m negatif olur. $a^{\frac{m}{n}}$ sayısı

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

biçiminde tanımlanır. Özel olarak, $m = 1$ alınırsa

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

bağıntısı elde edilir.

ÖRNEK : $8^{\frac{5}{3}}$ ve $4^{-\frac{3}{2}}$ ifadelerini hesaplayınız.

Çözüm :

$$8^{\frac{5}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^5 = 2^5 = 32$$

$$4^{-\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^{-3} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}.$$

Herhangi r ve s rasyonel sayıları ve a, b pozitif reel sayıları için,

$$a^r . a^s = a^{r+s} \ , \quad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left(a^r\right)^s = a^{r.s} \ , \quad (ab)^s = a^s . b^s$$

dır.

ÖRNEK : $(32)^{1/6} . 2^{-\frac{1}{3}}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm :

$$(32)^{\frac{1}{6}} . 2^{-\frac{1}{3}} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{6}} . 2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6} - \frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

PROBLEMLER

1. A, B, C herhangi üç küme olsun. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $A \setminus A = \varnothing$

(b) $A \setminus \varnothing = A$

(c) $A \cap B = B \cap A$

(d) $A \cup B = B \cup A$

(e) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

(ç) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(d) $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cap C)$

(e) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

(f) $A^t - B^t = B \setminus A$

(g) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

(h) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

(ı) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

2. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$

(b) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$

(c) $A \subset B \Leftrightarrow A^t \supset B^t$

(ç) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow B \subset A^t$

(d) $A \subset C$ ve $B \subset C \Leftrightarrow A \cup B \subset C$

(e) $C \subset A$ ve $C \subset B \Leftrightarrow C \subset A \cap B$

(f) $A \times B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$ veya $B = \varnothing$

(g) $A \setminus B)^t = (B \setminus A)^t \Leftrightarrow A = B$

3. a ve b pozitif iki sayı olsun.

$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ olduğunu gösteriniz.

4. 2 ile tam bölünebilen tamsayılara çift sayı, çift olmayan tam sayılara da tek sayı denir. Buna göre her çift sayı, m bir tamsayı olmak üzere, $2m$ şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde her tek sayı da $2m + 1$ formunda yazılabilir. Her çift sayının karesinin çift, her tek sayının karesinin tek sayı olduğunu gösteriniz.

5. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

(a) $|1 - x| = 2$

(b) $|x + 1| = |x + 3|$

(c) $|2x| = |x - 2|$

(d) $|x - 1| + |x| = 1$

(e) $|3x - 1| = 3x - 1$

(f) $|2x - 4| = 4 - 2x$

6. Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz.

(a) $|x - 1| \leq 3$

(b) $|x + 1| > 2$

(c) $|x - 1| > |x|$

(d) $|x| + |x - 1| \geq 1$

(e) $|5x - 4| < 2x + 1$

(f) $|3x + 12| > 0$

7. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

(a) $[\![x]\!] = 3$

(b) $[\![-2x]\!] = -2$

(c) $[\![-x + 2]\!] = 1$

(d) $[\![x + 1]\!] = x$

(d) $[\![x - 1]\!] = x$

(f) $[\![x + 3]\!] = 2[\![x]\!] - 3$

8. Aşağıdaki eşitsizlikleri çözünüz.

(a) $[\![2x]\!] > 3$

(b) $[\![x + 3]\!] \leq 2$

(c) $[\![1 - 3x]\!] \geq 4$

(d) $[\![x + 4]\!] < 5$

(e) $[\![2x]\!] \geq 2x$

(f) $[\![3x]\!] < 3x$

9. Toplamları rasyonel olan iki irrasyonel sayı bulunuz.

10. Çarpımları rasyonel olan iki irrasyonel sayı bulunuz.

11. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz.

$(a)\ \sqrt{4.16.36}$

$(b)\ \sqrt{-0,00001}$

$(c)\ (8a^6)^{4/3}$

$(d)\ (32)^{-4/5}(16)^{5/4}$

$(e)\ \sqrt{\sqrt{12} - \sqrt{3}}$

12. "$a < b$ ve $b < c \Rightarrow a < c$ dir."

önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

13. "$a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ve $b = 0$ dır."

önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

14. $|a - 10| < 2$ ve $|b - 6| < 1$ eşitsizliğini sağlayan a ve b sayıları veriliyor. Aşağıdaki sayıların sınırları için ne söylenebilir.

(a) $a + b$ (b) $a - b$

(c) $a^2 - b^2$ (d) $a^2 + ab + 1$

(e) $a^3 - b^3$ (f) $a^2 + ab + b^2$

15. Aşağıdaki komşulukları, mutlak değer yardımıyla yazınız.

(a) 1 in 2 -komşuluğu

(b) -2 nin $\frac{1}{10}$ -- komşuluğu

16. $x^3 = 2$ olacak şekilde bir x rasyonel sayısının varolmadığını gösteriniz.

a, b, c sabit reel sayılar ve x bilinmeyen olmak üzere,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

tipindeki denklemlere ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemler adı verilir. Bu denklemin kökleri,

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

olmak üzere,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

sayılarıdır. Buna göre,

(1) $\Delta > 0$ ise, kökler farklı reel sayılardır.

(2) $\Delta = 0$ ise, kökler reel ve eşittir.

(3) $\Delta < 0$ ise, kökler reel değildir.

ÖRNEK : $x^2 - 4x - 5 = 0$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm :

$a = 1$, $b = -4$, $c = -5$ olduğundan

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4.1(-5) = 36$$

dır. O halde verilen denklemin iki farklı reel kökü vardır. Bu kökler

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{36}}{2.1} = \frac{4 + 6}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{4 - \sqrt{36}}{2.1} = \frac{4 - 6}{2} = -1$$

sayılarıdır.

$$y = ax^2 + bx + c$$

biçimindeki bir fonksiyonun grafiğini çizmek için şu yolu izlemekte yarar vardır:

(1) $x = 0$ için $y = c$ bulunur. Eğri y – eksenini c de kesmektedir.

(2) $y = 0$ için $ax^2 + bx + c = 0$ denklemi bulunur. Eğer $\Delta > 0$ ise, eğri Ox – eksenini farklı x_1 ve x_2 noktalarında keser. $\Delta = 0$ ise, eğri Ox– eksenine teğettir. $\Delta < 0$ ise, eğri Ox– eksenini kesmez.

(3) Eğrinin $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$ apsisli noktası tepe noktasıdır.

Bu anlatılanları bir örnekle pekiştirelim.

ÖRNEK :

$y = x^2 - 6x + 8$ eğrisini çiziniz.

Çözüm :

(1) $x = 0$ için $y = 8$ olur. Eğri Oy– eksenini 8 de keser.

(2) $y = 0$ için $x^2 - 6x + 8 = 0$ bulunur.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4.1.8 = 4 > 0$$

olduğundan, eğri Ox – eksenini

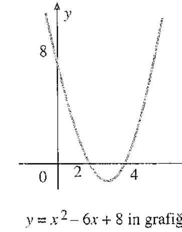
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 + 2}{2} = 4, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6 - 2}{2} = 2$$

apsisli noktalarda keser.

(3) $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$ apsisli nokta eğrinin tepe noktasıdır.

Bu noktanın ordinatı $y_0 = 3^2 - 6.3 + 8 = -1$ olur.

Sözkonusu eğri yanda çizilmiştir.



$y = x^2 - 6x + 8$ in grafiği

ÖRNEK :

$y = -x^2 + 4x - 4$ eğrisini çiziniz.

Çözüm :

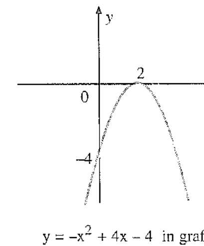
$x = 0$ için $y = -4$ olur. $y = 0$ için

$$-x^2 + 4x - 4 = 0$$

olur. $\Delta = 16 - 4.1.4 = 0$ olduğundan

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$$

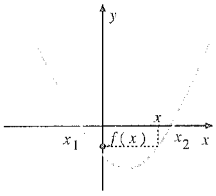
bulunur. Eğri ox – eksenine $x = 2$ apsisli noktada teğettir.

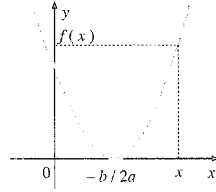


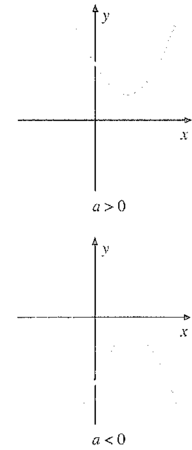
$y = -x^2 + 4x - 4$ in grafiği

UYARI : $a > 0$ için eğrinin (parabolün) kolları yukarı doğru,

$a < 0$ ise kollar aşağı doğrudur.







Şimdi $f(x) = ax^2 + bx + c$ ifadesinin işaretini inceleyelim.

$\Delta > 0$ olduğunda eğri Ox – eksenini iki farklı noktada keser. $a > 0$ olduğunda, kökler arasında bulunan x noktalarında $f(x)$ negatif olur. Şu halde kökler arasındaki x ler için $f(x)$ ile a ters işaretlidir. $x < x_1$ ve $x > x_2$ için $f(x) > 0$ olur. Buna göre şu tablo yapılabilir.

x	$-\infty$ x_1	x_2	∞
$f(x)$ in işareti	a nın işaretinin aynı	a nın işaretinin tersi	a nın işaretinin aynı

$\Delta = 0$ ise, $x_1 = x_2$ olduğundan, eğri Ox– eksenine $x = -\dfrac{b}{2a}$ noktasında teğettir. $a > 0$ olduğunda eğri Ox–ekseninin üst tarafında bulunur. Dolayısıyla her $x \neq -\dfrac{b}{2a}$ için $f(x) > 0$ dır. Şu halde $f(x)$ ile a aynı işarettedir. $a < 0$ olması halinde $f(x) < 0$ olur. Buna göre şu tablo yapılabilir.

x	$-\infty$ $-b/2a$	$+\infty$
$f(x)$ in işareti	a ile aynı	a ile aynı

$\Delta < 0$ ise eğri Ox– ekseninin bir tarafında bulunur.

$a > 0$ ise, $f(x) > 0$, $a < 0$ ise, $f(x) < 0$ dır. Dolayısıyla $f(x)$ in işareti a nın işaretiyle aynıdır.

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$ in işareti	a ile aynı

ÖRNEK : $x^2 - 3x - 10 < 0$ eşitsizliğini çözünüz.

Çözüm:

$\Delta = (-3)^2 - 4 . 1\,(-10) = 49 = 7^2 > 0$ olduğundan iki farklı kök vardır.

$x_1 = \dfrac{3+7}{2} = 5$, $x_2 = \dfrac{3-7}{2} = -2$

İşaret Tablosu:

x		-2		5	
$f(x)$	$+$		$-$		$+$

Verilen eşitsizliğin çözüm kümesi

$C = (-2, 5)$

açık aralığıdır.

Üç ve daha yüksek dereceden denklemleri çözmek için ya çarpanlara ayırma, ya ikinci dereceden denklemlere dönüştürme ya da Gauss Teoreminden yararlanılır. Bu yöntemleri birer örnekle açıklayalım.

ÖRNEK : $x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : Verilen denklem

$(x^3 - x) - 4x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x\,(x^2 - 1) - 4\,(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$

$(x^2 - 1)\,(x - 4) = 0 \Rightarrow (x + 1)\,(x - 1)\,(x - 4) = 0$

şeklinde çarpanlara ayrılabilir. Her çarpan sıfıra eşitlenerek

$x_1 = -1,\quad x_2 = 1,\quad x_3 = 4$

bulunur.

ÖRNEK : $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : $x^2 = y$ denirse, verilen denklem

$y^2 - 10y + 9 = 0$

şekline dönüşür. Bu denklem çözülerek

$y_1 = 1,\ y_2 = 9$

bulunur. $y = x^2$ olduğundan

$x^2 = 1$ veya $x^2 = 9$

bulunur. Bunlar çözülerek

$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -3,\ x_4 = 3$

kökleri elde edilir.

TEOREM 0.7 (Gauss Teoremi) :
a_1 , a_2 , ..., a_n tamsayılar olmak üzere

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

denkleminin bir rasyonel kökü varsa, bu kök a_n sayısını bölen bir tamsayıdır.

ÖRNEK : $x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm : Verilen denklemin bir rasyonel kökü varsa, bu kök 4 sayısını bölen ±1, ±2, ±4 sayılarından biridir. $x_1 = 1$ denklemde yerine konursa

$$1^3 - 3.1^2 - 2.1 + 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

bulunur, yani denklem sağlanır. Şu halde $x^3 - 3x^2 - 2x + 4$ ifadesinin çarpanlarından biri $x - 1$ dir. $x^3 - 3x^2 + 2x + 4$ ifadesi $x - 1$ ile bölünürse, bölüm $x^2 - 2x - 4$ olur. Şimdi $x^2 - 2x - 4 = 0$ denklemini çözelim.

$\Delta = 4 - 4.1(-4) = 20$ olacağından

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{20}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{2} = 1 + \sqrt{5}$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{20}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{2} = 1 - \sqrt{5}$$

bulunur. O halde verilen denklemin çözüm kümesi

$$\{1,\ 1 - \sqrt{5},\ 1 + \sqrt{5}\}$$

olur.

ÖRNEK : $4x^4 + 4x^3 - 9x^2 - x + 2 = 0$ denklemini çözünüz.

Çözüm : 2 sayısının bölenleri ±1, ±2 sayılarıdır. Bu sayıları denklemde yerine yazarak deneyelim.

$x = 1$ için

$$4 + 4 - 9 - 1 + 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

bulunur. $x_1 = 1$ bir köktür.

$x = -1$ için

$$4 - 4 - 9 + 1 + 2 = 0 \Rightarrow -6 = 0$$

bulunur ki bu, $x = -1$ in kök olmadığını gösterir. Benzer şekilde $x_2 = -2$ nin kök, fakat 2 nin kök olmadığı görülür. Şimdi diğer iki kökü bulalım.

$4x^4 + 4x^3 - 9x^2 - x + 2$ ifadesi $(x - 1)(x + 2) = x^2 + x - 2$ ile bölünürse bölüm $4x^2 - 1$ olur. $4x^2 - 1 = 0$ çözüldüğünde $x_3 = -\frac{1}{2}$, $x_4 = \frac{1}{2}$ kökleri bulunur. Çözüm kümesi

$$C = \left\{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$$

olur.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
   (a) $x^2 - 9 = 0$ (b) $4x^2 - 1 = 0$
   (c) $x^2 + 4x = 0$ (d) $2x - x^2 = 0$
   (e) $x^2 - 3x + 2 = 0$ (f) $t^2 + 5t + 6 = 0$
   (g) $4m^2 - 5m + 6 = 0$

2. Aşağıdaki denklemlerin çözüm kümesini bulunuz.
   (a) $\sqrt{2x - 3} + x = 3$
   (b) $\sqrt{3x + 1} + x = \sqrt{4x}$
   (c) $x^4 - 16 = 0$
   (ç) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$
   (d) $4^x - 3.2^x + 2 = 0$

3. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
   (a) $\frac{3}{x} + \frac{1}{2} = \frac{x}{x + 4}$
   (b) $\frac{1}{x + 2} - \frac{2}{x - 1} = \frac{3}{x^2 - 1}$
   (c) $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$

4. Aşağıdaki denklem sistemlerini çözünüz.
   (a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 38 \\ xy = 96 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x^2 + xy = 10 \\ y^2 + xy = 15 \end{cases}$

5. $x^2 + (m - 1)x + m = 0$ denkleminin köklerinden biri 2 olduğuna göre, diğeri kaçtır?

6. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümelerini bulunuz.
   (a) $x(x - 3) > 0$ (b) $x^2 + 13x + 40 < 0$
   (c) $x^2 - 4x + 4 > 0$ (d) $\frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 9x} \leq 0$

7. $2 < x^2 - 4x - 3 < 18$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

8. $|x^2 - 3x - 4| < 6$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

9. Her $x \in \mathbb{R}$ için

   $$x^2 - 2(4m - 1)x + 15m^2 - 2m - 7 > 0$$

   olması için m ne olmalıdır?

10. $(m + 1)x^2 - 4x - 2(2m + 1) = 0$

    denkleminin farklı ve gerçek (reel) iki kökünün olması için m ne olmalıdır?

11. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin (parabollerin) grafiğini çiziniz.
    (a) $y = x^2 - 5x - 6$ (b) $y = -2x^2 + 4x$
    (c) $y = 4x^2 - 4x + 1$

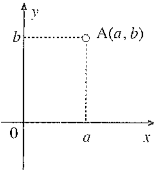
12. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.
    (a) $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$
    (b) $x^3 - 3x + 2 = 0$
    (c) $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$

13. $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin rasyonel kökünün olmadığını gösteriniz.

14. Aşağıdaki denklemleri, denklemin başında belirtilen bilinmeyene göre çözünüz.
    (a) t ; $\frac{1}{2}gt^2 - \upsilon_0 t - S_0 = 0$
    (b) R ; $w = \frac{mgR^2}{(x + R)^2}$, $(R > 0,\ x > 0)$
    (c) r ; $S = \pi r^2 + 2\pi r\ell$

0.5 DOĞRUNUN ANALİTİK İNCELENMESİ

0.5.1 Koordinatlar



Bilindiği gibi, düzlemdeki her bir noktaya bir (a,b) sıralı ikilisi, herbir (a,b) sıralı ikilisine bir nokta karşılık gelir. Eğer bir A noktasına karşılık gelen sıralı ikili (a,b) ise a reel sayısına A nın apsisi, b ye de ordinatı denir.

Düzlemde A ve B noktaları verildiğinde, bunlar arasındaki uzaklık $|AB|$ sembolü ile gösterilir. Bu uzaklığın nasıl hesaplanacağını aşağıdaki teorem göstermektedir.

> **TEOREM 0.8 (Düzlemde İki Nokta Arasındaki Uzaklık) :**
>
> $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ noktaları arasındaki uzaklık
>
> $$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
>
> birimdir.

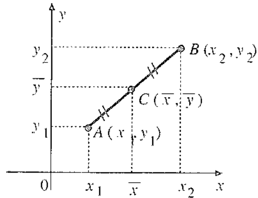
Bu teoremin ispatı, yanda verilen ABC diküçgenine Pisagor bağıntısını uygulamaktan ibarettir.

ÖRNEK : $A(5,8)$, $B(1,5)$ noktaları arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Çözüm :

$$|AB| = \sqrt{(5-1)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

birim olur.



Uç noktaları $A(x_1, y_1)$ ve $B(x_2, y_2)$ olan bir $[AB]$ doğru parçasının orta noktası $C(\bar{x}, \bar{y})$ olsun.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

dir.

ÖRNEK : Uç noktaları $A(2,5)$, $B(4,3)$ olan $[AB]$ doğru parçasının C orta noktasının koordinatlarını bulunuz.

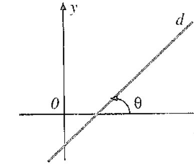
Çözüm :

$$\bar{x} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3 \; ,$$

$$\bar{y} = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

olacağından orta nokta $C(3,4)$ noktasıdır.

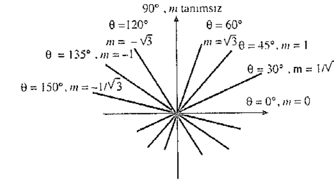
0.5.2 Bir Doğrunun Eğim Açısı ve Eğimi



Bir doğrunun $Ox-$ ekseni ile pozitif yönde yaptığı açıya doğrunun eğim açısı, eğim açısının tanjantına da doğrunun eğimi denir. Buna göre, d doğrusunun eğimi m ise

$$m = \tan\theta$$

olacaktır.

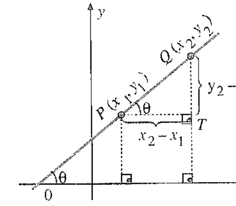


Çeşitli eğim açıları ve eğimler

d doğrusunun eğim açısı dar açı ise eğim pozitif, geniş açı ise eğim negatif olacaktır. Yanda çeşitli eğim açısı ve eğime sahip doğrular çizilmiştir. $\tan 90°$ tanımsız olduğundan, düşey doğruların eğimleri tanımsızdır.

Şimdi bir doğru üzerinde $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ noktalarını seçelim. PQT dik üçgeninde

$$\tan\theta = \frac{|QT|}{|PT|} \quad \text{olacağından} \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

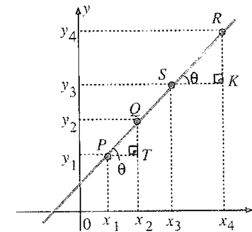


olur. Buna göre, y ve x deki değişimler $\Delta y = y_2 - y_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$

ile gösterilirse

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

yazılabilir. Buna göre bir doğrunun eğimi, kabaca "yükselen" kısmın "yatan" kısma oranı biçiminde tanımlanabilir.



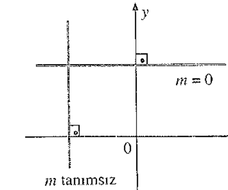
Bir doğrunun eğimi, doğru üzerinde seçilen noktalardan bağımsızdır. Yani noktalar değişse de eğim değişmez. Örneğin doğru üzerinde

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $S(x_3, y_3)$, $R(x_4, y_4)$

noktaları alındığında, $\overset{\Delta}{PQT}$ ve $\overset{\Delta}{SRK}$ üçgenlerinin benzerliğinden,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3}$$

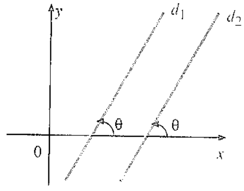
bulunur. Yani noktalar değiştikçe oran değişmemektedir.



Bir doğru Ox eksenine paralel olduğunda $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$ olacağından

$m = 0$ olur. Doğru $Oy-$eksenine paralel olduğunda $\Delta x = 0$, $\Delta y \neq 0$ olacağından m tanımsız olur.

0.5.3 Paralel ve Dik Doğrular



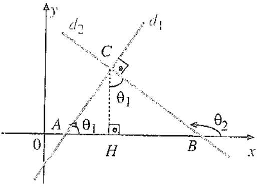
d_1 ve d_2 doğruları paralel ise onların eğim açıları eşit ölçülü, dolayısıyla eğimleri eşittir. Buna göre,

$$d_1 \, // \, d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2 .$$

Düşey olmayan d_1 ve d_2 dik doğrularının eğimleri, sırasıyla m_1 ve m_2 olsun.

$$m_1 = tan\theta_1 = \frac{|HB|}{|HC|}$$

$$m_2 = tan\theta_2 = -\frac{|HC|}{|HB|}$$



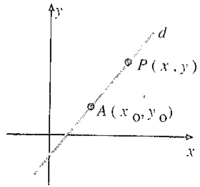
olacağından

$$m_1 \, . \, m_2 = -\frac{|HB|}{|HC|} \cdot \frac{|HC|}{|HB|} = -1$$

olur. Buna göre

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \, . \, m_2 = -1 .$$

0.5.4 Bir Noktası ve Eğimi Bilinen Doğrunun Denklemi



Bir doğrunun denklemini bulmak demek, onun üzerinde alınan değişken bir $P(x,y)$ noktasının x, y koordinatları arasında bir bağıntı bulmak demektir.

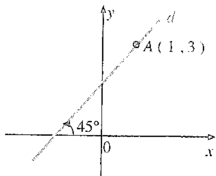
$A(x_0, y_0)$ noktasından geçen ve eğimi m olan doğru üzerinde bir $P(x,y)$ noktası alınırsa,

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

bulunur. Buna göre doğrunun denklemi

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

olur.



ÖRNEK : $A(1,3)$ noktasından geçen ve Ox– ekseni ile pozitif yönde 45 derecelik açı yapan doğrunun denklemini yazınız.

Çözüm : Eğim, eğim açısının tanjantı olduğundan

$$m = tan45° = 1$$

dır. Buna göre doğrunun denklemi

$$y - 3 = 1 \, (x - 1) \Rightarrow y = x + 2$$

olur.

$$y - y_0 = m \, (x - x_0)$$

denklemi

$$y = mx + (y_0 - mx_0) \Rightarrow y = mx + n$$

biçiminde de yazılabilir. Şu halde x in katsayısı olan sayı doğrunun eğimidir.

ÖRNEK : $3x + 4y + 5 = 0$ denklemli doğrunun eğimini bulunuz.

Çözüm : y çekilirse

$$y = -\frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$$

bulunur. Buna göre $m = -\frac{3}{4}$ olur.

Genel olarak, denklemi

$$ax + by + c = 0$$

olan doğrunun eğimi

$$m = -\frac{a}{b}$$

sayısıdır.

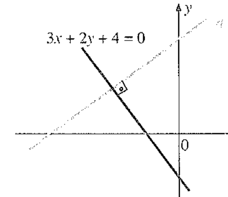
ÖRNEK : $A(2,-3)$ noktasından geçen ve $2x + 4y + 5 = 0$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini yazınız.

Çözüm:

$2x + 4y + 5 = 0$ denklemli doğrunun eğimi $m = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ olduğundan, denklemi istenen doğrunun da eğimi $-\frac{1}{2}$ olur. Dolayısıyla, istenen denklem

$$y - (-3) = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow x + 2y + 4 = 0$$

olur.



ÖRNEK: $A(1,4)$ noktasından geçen ve denklemi $3x + 2y + 4 = 0$ olan doğruya dik olan doğrunun denklemini yazınız.

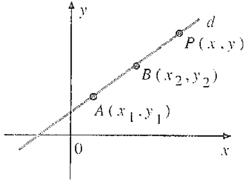
Çözüm:

$3x + 2y + 4 = 0$ denklemli doğrunun eğimi $m_1 = -\frac{3}{2}$ olduğundan, denklemi istenen doğrunun eğimi $\frac{2}{3}$ olur. O halde istenen denklem

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x - 1) \Rightarrow 2x - 3y + 10 = 0$$

olur.

0.5.5 İki Noktası Verilen Doğrunun Denklemi



$A(x_1,y_1)$ ve $B(x_2,y_2)$ noktalarından geçen doğrunun üzerinde bir $P(x,y)$ noktası alalım.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad \text{ve} \quad m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

olacağından

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

yazılabilir. Orantı özelliklerinden yararlanarak, bu bağıntı

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2}$$

biçiminde de yazılabilir.

ÖRNEK: $A(1,3)$, $B(2,5)$ noktalarından geçen doğrunun denklemini yazınız. Bu doğru Ox– eksenini hangi noktada keser?

Çözüm: Yukarıdaki denklemde

$$x_1=1, \quad y_1=3, \quad x_2=2, \quad y_2=5$$

yazılırsa

$$\frac{y-3}{3-5}=\frac{x-1}{1-2} \Rightarrow y=2x+1$$

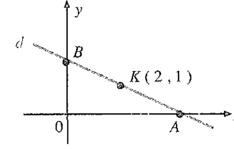
bulunur. Ox – ekseni üzerinde $y=0$ olacağından $0=2x+1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$ bulunur.

Şu halde doğru Ox – eksenini $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ noktasında keser.

Bir doğru koordinat eksenlerini $(p,0)$ ve $(0,q)$ noktalarında kessin. İki noktası bilinen denkleminden yararlanarak, bu doğrunun denkleminin

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$$

olacağı kolayca gösterilebilir.



ÖRNEK : Yandaki şekilde $|OA|=4.\ |OB|$ dir. d doğrusunun denklemini bulunuz.

Çözüm: B nin ordinatı q ise, A nın apsisi $4q$ dur. Buna göre doğrunun denklemi

$$\frac{x}{4q}+\frac{y}{q}=1 \Rightarrow x+4y=4q$$

olur. Doğru $K(2,1)$ noktasından geçtiğinden

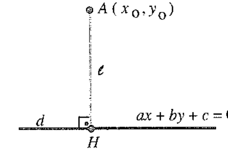
$$2+4\,.\,1=4q \Rightarrow q=\frac{3}{2}$$

bulunur. Dolayısıyla doğrunun denklemi

$$x+4y=6$$

olur.

0.5.6 Bir Noktanın Bir Doğruya Olan Uzaklığı



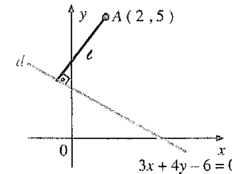
Bir $A(x_0,y_0)$ noktasının denklemi $ax+by+c=0$ olan doğruya olan uzaklığı A dan doğruya indirilen $[AH]$ dikmesinin uzunluğudur. AH doğrusunun eğimi $\frac{b}{a}$ dır. Dolayısıyla denklemi $y-y_0=\frac{b}{a}(x-x_0)$ dır.

Bu doğru ile $ax+by+c=0$ doğrusunun kesim noktası H noktasıdır. A ve H arasındaki uzaklık hesaplanarak ℓ bulunur.

Yukarıdakiler yapıldığında

$$\ell=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

bulunur.



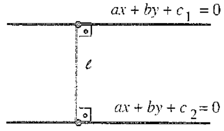
ÖRNEK: $A(2,5)$ noktasının $3x+4y-6=0$ denklemli doğruya olan uzaklığını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\ell=\frac{|3\,.\,2+4\,.\,5-6|}{\sqrt{9+16}}=\frac{|20|}{5}=4 \ \text{birim}$$

olur.

0.5.7 Paralel İki Doğru Arasındaki Uzaklık



Denklemleri

$$ax + by + c_1 = 0 \ , \ ax + by + c_2 = 0$$

olan doğrular arasındaki uzaklık

$$\ell = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

birimdir.

ÖRNEK: Denklemleri $3x - 4y + 10 = 0$ ve $6x - 8y - 5 = 0$ olan doğrular arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Çözüm:

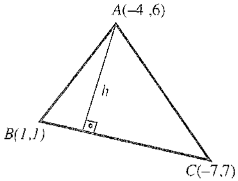
Verilen denklemlerde x ve y lerin katsayıları eşitlenirse

$$6x - 8y + 20 = 0, \qquad 6x - 8y - 5 = 0$$

denklemleri bulunur. Buna göre,

$$\ell = \frac{|20 - (-5)|}{\sqrt{36 + 64}} = \frac{25}{10} = 2,5$$

birim olur.



ÖRNEK : Köşeleri $A(-4,6)$, $B(1,1)$, $C(-7,7)$ olan üçgenin alanını bulunuz.

Çözüm :

BC doğrusunun denklemi

$$\frac{y - 7}{7 - 1} = \frac{x + 7}{-7 - 1} \Rightarrow 3x + 4y - 7 = 0$$

olur.

$$h = \frac{|3(-4) + 4.6 - 7|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{5}{5} = 1 \ \text{br},$$

$$|BC| = \sqrt{(1 + 7)^2 + (1 - 7)^2} = 10 \ \text{br}$$

olduğundan

$$Alan(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}.10.1 = 5 \ \text{br}^2$$

olur.

PROBLEMLER

1. Düzlemde $A(3,2)$, $B(5,4)$ noktalarından eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerini bulunuz.

2. Düzlemde $A(3,2)$, $B(1,4)$, $C(5,2)$ noktalarından eşit uzaklıkta bulunan bir nokta bulunuz.

3. Köşeleri $A(5,4)$, $B(1,0)$, $C(-2,3)$ olan üçgenin bir diküçgen olduğunu gösteriniz.

4. Aşağıda iki noktası verilen doğruların eğimlerini bulunuz.
   (a) $A(-1,2)$, $B(-2,-1)$
   (b) $A(2,-1)$, $B(-2,1)$
   (c) $A(5,2)$, $B(5,6)$

5. Aşağıda bir noktası ve eğimi verilen doğruların denklemini yazınız.
   (a) $A(-1,1)$, $m = 1$
   (b) $A(-2,2)$, $m = \frac{1}{2}$

6. Aşağıda iki noktası verilen doğruların denklemini yazınız.
   (a) $A(-1,3)$, $B(1,5)$
   (b) $A(2,3)$, $B(-1,9)$

7. Aşağıda verilen doğruların eksenleri kestiği noktaları bulup, grafiklerini çiziniz.
   (a) $3x + 4y = 12$
   (b) $\sqrt{2}\,x - \sqrt{3}\,y = \sqrt{6}$

8. $A(1,2)$ noktasından geçen ve $x + 2y = 3$ doğrusuna paralel olan doğrunun denklemini yazınız.

9. $A(-2,4)$ noktasından geçen ve $y = 2x - 3$ doğrusuna dik olan doğrunun denklemini yazınız.

10. $A(1,2)$ ve $x + 2y = 3$, $2x - 3y = -1$ doğrularının kesim noktasından geçen doğrunun denklemini yazınız.

11. $ax + by + c_1 = 0$, $ax + by + c_2 = 0$

denklemli doğrulardan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerinin

$$ax + by + \frac{c_1 + c_2}{2} = 0$$

denklemli doğru olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak $3x + 4y - 2 = 0$, $6x + 8y + 3 = 0$ denklemli doğrulardan eşit uzaklıkta bulunan noktaların geometrik yerinin denklemini bulunuz.

12. $A(2,3)$ noktasından geçen ve orijinden 2 birim uzaklıkta bulunan doğruların denklemini bulunuz.

13. Aşağıda denklemleri verilen doğru çiftlerinin, eğer varsa, kesim noktalarının koordinatlarını bulunuz.

14. Köşeleri $A(1,1)$, $B(4,2)$, $C(6,4)$, $D(3,3)$ olan paralelkenarın alanını bulunuz.

15. Aşağıda verilen noktaların karşılarında denklemleri yazılı doğrulara olan uzaklığını bulunuz.

(a)	$A(2,-1)$,	$4x + 3y + 10 = 0$
(b)	$B(0,3)$,	$5x - 12y - 29 = 0$
(c)	$C(-2,3)$,	$2x - y - 3 = 0$
(d)	$D(1,-2)$,	$x - 2y - 5 = 0$

16. Aşağıda denklemleri verilen paralel doğru çiftleri arasındaki uzaklığı bulunuz.

(a) $3x - 4y - 10 = 0$; $6x - 8y + 5 = 0$

(b) $5x - 12y + 26 = 0$; $5x - 12y - 13 = 0$

(c) $4x - 3y + 15 = 0$; $8x - 6y + 25 = 0$

(d) $24x - 10y + 39 = 0$; $12x - 5y - 26 = 0$

17. $3x + 4y + 4 = 0$ ve $5x - 12y + 13 = 0$ denklemli doğruların oluşturduğu açıların açıortaylarının denklemlerini yazınız.

18. $A(-2,-1)$, $B(m,2)$, $C(1,4)$ noktalarının aynı doğru üzerinde olması için m ne olmalıdır?

19. $3x - 3y + m - 1 = 0$ ile $x + 3y = 9$

denklemli doğrular Oy – ekseni üzerinde kesişiyorlar. Bu doğruların eksenlerle kesim noktaları A, B, C olduğuna göre, ABC üçgeninin alanı kaç br^2 dir?

20. $3x - y + 1$ ve $x + 2y + 5 = 0$ denklemli doğrular, $y = x$ doğrusuna paralel bir d doğrusu üzerinde kesişiyorlar. d doğrusunun denklemini bulunuz.

21. $(a-1)x + 3y = 0$ ve $2x - ay = 4$ denklemli doğrular dik kesiştiğine göre, kesim noktasının koordinatlarını bulunuz.

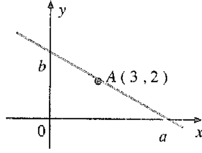
22. $A(a-3, a+4)$, $B(a+1, a)$ noktaları veriliyor.

$[AB]$ doğru parçasının orta noktası II. bölgede ise A noktası hangi bölgededir?

23. $y = a(a-1)x + 4$ denklemli doğrunun eğim açısının geniş açı olması için a ne olmalıdır?

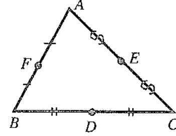
24. $5x + 12y = 10$ denklemli doğrudan 5 birim uzakta bulunan noktaların geometrik yerinin denklemi nedir?

25. Yandaki şekilde $A(3,2)$ noktasından geçen doğru görülüyor.



$(a-3)$ $(b-2)$ çarpımı nedir?

26.



Kenar orta noktaları $D(-1,3)$, $E(3,-5)$, $F(2,4)$ olan bir ABC üçgeninin köşelerinin koordinatlarını bulunuz.

27. $x + y = 7$, $x - 2y + 2 = 0$, $mx + y + 5 = 0$

doğrularının aynı noktadan geçmesi için m ne olmalıdır?

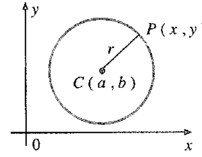
28. $y = 4x$ doğrusu üzerinde, $A(4,1)$ ve $B(-2,3)$ noktalarından eşit uzaklıkta bulunan noktanın koordinatlarını bulunuz.

29. $y = -x + 2$ denklemli doğru üzerinde, $A(5,5)$ noktasına en yakın noktanın koordinatlarını bulunuz.

30. $x - y + 2 = 0$ ve $\sqrt{3}\,x - y - 1 = 0$

denklemli doğruların oluşturduğu dar açının ölçüsü kaç derecedir?

0.6 ÇEMBERİN ANALİTİK İNCELENMESİ



$M(a,b)$ koordinat düzleminde sabit bir nokta ve r bir pozitif sayı olsun. Düzlemde M noktasından r kadar uzakta olan noktaların kümesi, C merkezli r yarıçaplı çemberdir.

$P(x,y)$ çembere ait bir nokta ise $|PC| = r$ olacağından

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

dir. İki tarafın karesi alınırsa

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

bulunur. Bu denkleme çemberin standart denklemi denir.

Eğer çemberin merkezi orijinde, yani $a = b = 0$ ise, denklem

$$x^2 + y^2 = r^2$$

şeklini alır. Buna merkezil çember adı verilir. Yarıçapı 1 birim olan çembere birim çember denir.

ÖRNEK : $C(-1,3)$ merkezli, $r = 5$ birim yarıçaplı çemberin denklemini yazınız.

Çözüm : $a = -1$, $b = 3$, $r = 5$ olduğundan, çemberin denklemi

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25$$

olur.

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ifadesindeki kareler alınır ve düzenlenirse,

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

bağıntısı elde edilir.

$$-2a = D, \quad -2b = E, \quad a^2 + b^2 - r^2 = F$$

denirse

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

denklemi bulunur. Denklemi bu formda verilen çemberin merkezinin koordinatları

$$(a,b) = \left(-\frac{D}{2}\ ,\ -\frac{E}{2}\right)$$

ve yarıçapı

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

dir.

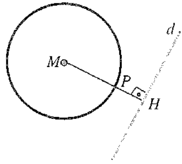
ÖRNEK : $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 20 = 0$ çemberinin merkezini ve yarıçapını bulunuz.

Çözüm:

$$a=-\frac{D}{2}=-\frac{-4}{2}=2,\quad b=-\frac{E}{2}=-\frac{10}{2}=5$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=\frac{1}{2}\sqrt{16+100-80}=\frac{1}{2}\sqrt{36}=3$$

olduğundan, merkez $M(2,-5)$, yarıçap $r=3$ dür.



ÖRNEK : $x^2+y^2+2x-4y-11=0$ denklemli çemberin $3x-4y-19=0$ doğrusuna en yakın noktasının bu doğruya olan uzaklığı kaç birimdir?

Çözüm: Çemberin doğruya en yakın noktası, merkezden doğruya indirilen dikmenin çemberi kestiği P noktasıdır.

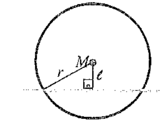
$$x^2+y^2+2x-4y-11=0 \Rightarrow (x^2+2x)+(y^2-4y)-11=0 \Rightarrow$$

$$(x+1)^2-1+(y-2)^2-4-11=0 \Rightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=16$$

olduğundan, merkez $M(-1,2)$ yarıçap $r=4$ dür.

$$|MH|=\frac{|3.(-1)-4.2-19|}{\sqrt{9+16}}=\frac{30}{5}=6 \text{ birim}$$

$$|PH|=|MH|-r=6-4=2 \text{ birimdir.}$$



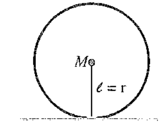
(1)

r yarıçaplı bir çember ile bir doğru verilmiş olsun. Çemberin merkezinin doğruya olan uzaklığı ℓ olsun.

(1) $\ell<r$ ise doğru çemberi iki noktada keser.

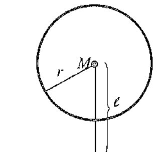
(2) $\ell=r$ ise doğru çembere teğettir.

(3) $\ell>r$ ise doğru çemberi kesmez.



(2)

ÖRNEK : $y=4$ doğrusunun $x^2+y^2-6x+1-m=0$ denklemli çembere teğet olması için m ne olmalıdır?



(3)

Çözüm : Çemberin merkezini bulalım.

$$a=-\frac{D}{2}=\frac{6}{2}=3,\quad b=-\frac{E}{2}=0$$

olduğundan merkez $M(3,0)$ dır. Bunun $y=4$ doğrusuna olan uzaklığı $\ell=4$ birimdir. O halde çemberin doğruya teğet olması için $r=4$, bunun için de

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}=\frac{1}{2}\sqrt{36+0-4(1-m)}=4$$

$$\Rightarrow \sqrt{32+4m}=8 \Rightarrow 32+4m=64$$

$$\Rightarrow m=8$$

olmalıdır.

PROBLEMLER

1. Merkezi $M(2,-1)$ olan ve $P(5,3)$ noktasından geçen çemberin denklemini yazınız.

2. Merkezi $M(-3,3)$ de olan ve koordinat eksenlerine teğet olan çemberin denklemini yazınız.

3. Merkezi $y=8-3x$ doğrusu üzerinde bulunan ve koordinat eksenlerine teğet olan çemberin denklemlerini yazınız.

4. $A(2,2)$, $B(3,1)$ noktalarından geçen ve merkezi $y=-x+3$ denklemli doğru üzerinde bulunan çemberin denklemini yazınız.

5. $(m+2)x^2+(2m+1)y^2+(m-1)xy+6x-12y-6(m+1)=0$ denklemi bir çember belirttiğine göre bu çemberin merkezini ve yarıçapını bulunuz.

6. $3x-4y+5=0$ ve $-6x+8y-5=0$ denklemli doğrulara teğet olan çemberlerin yarıçapı kaç birimdir?

7. Merkezi $y=-2x$ doğrusu üzerinde bulunan ve $4x-3y+10=0$, $4x-3y-30=0$ denklemli doğrulara teğet olan çemberin denklemini bulunuz.

8. Denklemi $y=3x$ olan doğruya orijinde teğet olan ve $A(0,6)$ noktasından geçen çemberin denklemini yazınız.

9. $A(3,0)$ ve $B(-5,0)$ noktalarından geçen ve yarıçapı 4 birim olan çemberin denklemini yazınız.

10. Merkezi orijinde olan ve $3x-4y+10=0$ denklemli doğruya teğet olan çemberin denklemini bulunuz.

11. Yarıçapı $r=\sqrt{5}$ birim olan ve $x-2y=1$ doğrusuna $P(3,1)$ noktasında teğet olan çemberin denklemini yazınız.

12. Merkezi $M(3,-1)$ de olan ve $2x-5y+18=0$ doğrusundan 6 birimlik bir kiriş ayıran denklemini yazınız.

13. $A(1,0)$ noktasından geçen ve $2x+y+2=0$, $2x+y-18=0$ denklemli doğrulara teğet olan çemberlerin denklemlerini yazınız.

14. $3x+4y-35=0$, $3x-4y-35=0$, $x-1=0$ denklemli doğrulara teğet olan çemberin denklemini yazınız.

15. Merkezi $M(-1,3)$ de olan çembere, üzerindeki $P(0,1)$ noktasından çizilen teğetin denklemini yazınız.

16. $y=kx$ doğrusu ile

$$x^2+y^2-10x+16=0$$

çemberi veriliyor.

(a) Doğrunun çemberi iki noktada kesmesi

(b) Doğrunun çembere teğet olması

(c) Doğrunun çemberi kesmemesi

için k ne olmalıdır?

1. a ve b , $a < b$ olacak şekilde herhangi iki sayı olsun.

$a < \frac{a+b}{2} < b$ olduğunu gösteriniz.

[($\frac{a+b}{2}$) sayısına a ile b nin aritmetik ortalaması denir.]

2. x sıfırdan farklı bir rasyonel sayı ve y irrasyonel olsun.

$x - y,\quad x + y,\quad x \cdot y,\quad \frac{x}{y},\quad \frac{y}{x}$

sayılarının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

3. İki irrasyonel sayının toplamı ve çarpımı daima irrasyonel midir?

4. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

(a) $|x-2|^2 - |x-2| = 6$

(b) $|x+2| = |2x|$

5. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

(a) $[\![2x]\!] = 2\,[\![x]\!] + 1$

(b) $[\![x+3]\!] = 2\,[\![x]\!] + 5$

(c) $[\![x^2 - 3x]\!] = -2$

(d) $[\![x + [\![x + [\![x]\!]\,]\!]\,]\!] = 6$

(e) $\left[\!\left[\frac{x+1}{3}\right]\!\right] = 4$

(f) $\left[\!\left[\frac{x+1}{x}\right]\!\right] = 3$

6. Hangi rasyonel x sayıları için

$\sqrt{x^2+x+3}$ rasyoneldir?

7. Aşağıdaki eşitsizliklerin çözüm kümesini bulunuz.

(a) $|x^2 - 5x + 4| > x^2 - 5x + 4$

(b) $|2x-3| - |x+1| > 0$

(c) $|x^2 - 3x| > |x^2| - |3x|$

8. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $a < b \Rightarrow -a > -b$

(b) $0 < a < b$ ve $0 < c < d \Rightarrow ac < bd$

(c) $0 < a < 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > a$

9. $x^3 - x - 1 = 0$ denkleminin 1 ile 2 arasında bir irrasyonel köke sahip olduğunu gösteriniz.

10. Köşe koordinatları tamsayılar olan bir eşkenar üçgenin bulunmadığını gösteriniz.

11. $|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a \cdot b \geq 0$

önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

12. $0 < a < b \Rightarrow a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$

önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

[$\sqrt{ab}$ sayısına a ile b nin geometrik ortalaması denir.]

13. $0 < a < b$ ve $\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ olsun.

$a < h < b$ olduğunu gösteriniz. [h sayısına a ile b nin harmonik ortalaması denir.]

14. $0 < a < b$ olsun.

$\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$ olduğunu gösteriniz.

15. Bir üçgenin iki kenarının orta noktasını birleştiren doğru parçasının üçüncü kenara paralel ve uzunluğu, üçüncü kenarın uzunluğunun yarısına eşittir, gösteriniz.

16. Her $a, b \in \mathbb{R}$ için

$|a-b| = \text{maks}\,\{a,b\} - \min\,\{a,b\}$

olduğunu gösteriniz.

17. $\text{maks}\,\{a,b\} = \frac{(a+b)+|a-b|}{2}$

$\min\,\{a,b\} = \frac{(a+b)-|a-b|}{2}$

olduğunu gösteriniz.

18. Her $a, b, c \in \mathbb{R}$ için

$a \cdot b + b\ c + a \cdot c \leq a^2 + b^2 + c^2$

olduğunu gösteriniz.

19. $n > 1$ için

$M = \text{maks}\,\{a, a^2, \ldots, a^n\}$

$m = \min\,\{a, a^2, \ldots, a^n\}$

olsun. a nın aşağıdaki değerleri için M ve m sayılarını bulunuz.

(1) $0 < a < 1$

(2) $a > 1$

(3) $-1 < a < 0$

(4) $a < -1$

20. Merkezi orijinde, yarıçapı $\frac{5}{2}$ olan çemberin üzerinde ve iç bölgelerinde koordinatları tamsayı olan kaç nokta vardır?

21. $B = \{\,(x,y) :\ x \geq 0\ ,\ 0 \leq y \leq 100 - x\}$

kümesi üzerinde koordinatları tamsayı olan kaç nokta vardır?

22. Aşağıdaki önermelerin doğruluğunu gösteriniz.

a) Bir çift sayının karesi de çifttir.

b) Bir tek sayının karesi de tektir.

c) Bir çift sayının kübü de çifttir.

d) Bir tek sayının kübü de tektir.

23. Her a , $b \in \mathbb{R}$ için

$\big||a| - |b|\big| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$

olduğunu gösteriniz. Eşitlikler hangi durumlarda vardır?

24. $a \cdot b \neq 0$ ve $|a| \neq |b|$ dir.

$\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{b} = \frac{b}{x-a} + \frac{a}{x-b}$

denklemini çözünüz.

25. $|xy - ab| \leq |x|\ |y-a| + |a|\ |x-b|$

olduğunu gösteriniz.

26. $(x-1)^{x^2-3x-4} = 1$

denklemini çözünüz.

27. xx ve yy iki basamaklı birer sayıdır.

$\frac{\sqrt{xx}}{\sqrt{yy}} + \frac{\sqrt{yy}}{\sqrt{xx}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$

olduğuna göre x ve y nedir?

HAREZMİ (780 – 850)

Harezmi Ortaçağ İslam Dünyasının en büyük Türk dehalarından birisidir. Matematik, Astronomi, Coğrafya ve Tarih konusunda önemli çalışmaları vardır. Türkistan'da Aral Gölü'nün güneyinde bulunan Harezm şehrinde doğmuştur.

Yedinci Abbasi Halifesi Memun tarafından Bağdat'a davet edilmiş, burada Beyt'el – Hikme (Bilgelik Evi) nin müdürlüğünü yapmıştır.

Harezmi cebir biliminin babası olarak kabul edilmiştir. Bu ünvan, cebir konusunda ilk el kitabının yazarı olması münasebetiyle verilmiştir. İslam dünyasında cebir alanında bir otorite olarak tanındığı gibi, bu matematik alanının Avrupa'da yaygınlaşmasında büyük rol oynamıştır.

Avrupalı matematikçilerin cebirle ilk karşılaşmaları, Harezmi'nin Cebir kitabının 12. yüzyılda Latince'ye çevrilmesiyle olmuştur. Avrupa dillerinde bu matematik alanına "algebra" veya "algebre" isminin veriliş nedeni, Harezmi'nin kitabının adının "El – Cebr" olmasıdır. Hesap yöntemi manasına gelen "algoritma" terimi de Harezmi'nin adından (Alkhorizmus – Algorisma) geldiği kabul edilmektedir.

Harezmi'nin diğer önemli bir eseri de Hint aritmetiği üzerine olan "Kitâb el–Hesâb el – Hindi" dir. Bunun arapça orjinali kayıp olup Latince çevirisiyle günümüze intikal etmiştir.

Harezmi'nin asıl önemi, ilk defa sistemli bir şekilde cebir kurallarını sunan kimse olmasıdır.

Harezmi Cebir konusunda $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $x^2 + bx = c$, $x^2 + c = bx$, $bx + c = x^2$ tipindeki denklemleri teker teker ele alıp bunların nasıl çözülebileceğini açıklamıştır. Bunları çözerken geometri ve özellikle analitik geometriyi kullanmıştır. Dolayısıyla Harezmi'nin cebirsel bir denklemin çözümünde analitik geometriyi ilk kullananan matematikçilerden biri olduğunu da söyleyebiliriz.

Harezmi, denklemleri çözerken daima pozitif kökleri bulmuştur. Bulduğu sonuçlar, günümüzde kullanılan çözüm yöntemleri ile bağdaşmaktadır. Harezmi'nin bulduğu sonuçlar, kökleri pozitif olan denklemler için tam sonuçlardır.

Harezmi, cebirsel denklemleri çözerken yapılacak işlemleri ve bu işlemlerin sırasını açık bir biçimde veren ilk matematikçidir. Bu nedenle bilgisayar ilminin temeli olan algoritmanın ve dolayısıyla bilgisayar programcılığının kurucusu olarak kabul edilmiştir.

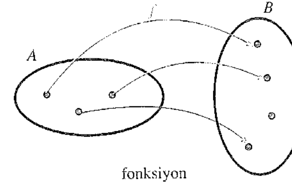
Uygarlığın gerçek ölçüsü; ne nüfus çokluğu, ne kentlerin büyüklüğü, ne de üretim bolluğudur. Gerçek ölçü, ülkenin yetiştirdiği insanların nitelikleridir.

Ralph EMERSON

1 FONKSİYONLAR

1.1 FONKSİYON KAVRAMI

Bilindiği gibi yarıçapı r birim olan bir dairenin alanı $A = \pi r^2$ birimkaredir. r yarıçapı değiştikçe, A alanı da değişir. Uygulamalı bilimlerde, değişebilen büyüklükler arasında bazı bağıntıların bulunması bazı olayların incelenmesini kolaylaştırır. Örneğin belli bir sıcaklıkta tutulan bir gazın basıncı gazın hacmine, bir hareketlinin aldığı yolun, hareketlinin hızına ve geçen zamana bağlı olduğu herkes tarafından bilinir. İşte bu gibi hallerde değişen büyüklükler arasındaki matematiksel bağıntının sağladığı özelliklerin bilinmesi çok önemlidir. Bu bölümde fonksiyon adı verilen özel bağıntılar incelenecektir.



fonksiyon

TANIM :

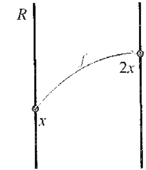
A ve B iki küme olsun. A nın herbir elemanını B nin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen f kuralına A dan B ye bir **fonksiyon** denir.

A dan B ye bir fonksiyon, genellikle,

$$f : A \to B \quad \text{veya} \quad A \xrightarrow{f} B$$

biçiminde gösterilir. Burada A kümesine fonksiyonun **tanım kümesi**, B kümesine de **değer kümesi** adı verilir.

Şu halde, bir f bağıntısının A dan B ye bir fonksiyon olması için A tanım kümesinin herbir elemanına B de mutlaka bir eleman karşılık gelmelidir ve karşılık gelen bu eleman bir tek olmalıdır. Başka bir deyişle A daki bir elemana B' de birden fazla eleman karşılık gelmemelidir.



Tanım kümesinin her bir elemanını değer kümesinin bir ve yalnız bir elemanına eşleyen kural çeşitli şekillerde verilebilir. Örneğin R den R ye olan bir fonksiyonun eşleştirme kuralını "Her sayıya 2 katını karşılık getirme" olarak verilebilir. Bu şekilde verilen fonksiyon;

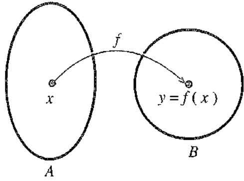
$$f : x \to 2x \quad \text{veya} \quad f(x) = 2x$$

şeklinde yazılabilir.

Eğer x in görüntüsü olan $2x$ sayısı başka bir y değişkeni ile gösterilirse, yukarıdaki fonksiyon kısaca

$$y = 2x$$

biçiminde gösterilebilir.



Eğer f fonksiyonu, tanım kümesinin x elemanını değer kümesinin y elemanı ile eşleştirirse x in f altındaki görüntüsü y dir denir ve

$$y = f(x)$$

biçiminde gösterilir. x tanım kümesinde değiştikçe, ona bağlı olarak y de değer kümesinde değişir.

Bu nedenle

$$y = f(x)$$

bağıntısı yardımıyla bir fonksiyon tanımlandığında x elemanına bağımsız değişken, y elemanına bağımlı değişken adı verilir.

ÖRNEK : Bir karenin alanı, onun bir kenar uzunluğunun fonksiyonu mudur?

Çözüm :

Bir kenarının uzunluğu k olan bir karenin A alanı,

$$A = k^2$$

dir. Her k için bir ve yalnız bir A vardır. Yani bir kenarının uzunluğu verildiğinde çizilecek karenin bir tek alanı vardır. Dolayısıyla karenin alanı, bir kenarının uzunluğunun fonksiyonudur.

16

A = 4.16 = 64 4

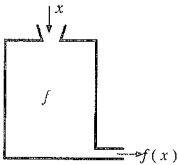
ÖRNEK : Bir dikdörtgenin alanı, onun çevresinin bir fonksiyonu mudur?

11

A = 9.11 = 99 9

Çözüm :

Bir dikdörtgenin alanı, onun çevresinin bir fonksiyonu değildir. Çünkü çevresi aynı olan dikdörtgenlerin alanları farklı olabilir. Örneğin çevresi 40 cm olan iki dikdörtgen farklı alanlara sahip olabilir. Eni 4, boyu 16 cm olan dikdörtgenin alanı $A = 4.\ 16 = 64$ cm^2 olduğu halde, eni 9, boyu 11 cm olan dikdörtgenin alanı $A = 9.11 = 99$ cm^2 olur. Görüldüğü gibi bir çevreye birden çok alan karşılık gelmektedir.



Fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki hususların bilinmesinde yarar vardır :

x, $f(x)$ ve f farklı şeylerdir. Zira x, A tanım kümesinin $f(x)$ de B değer kümesinin elemanıdır. f ise, A nın x elemanını B nin $f(x)$ elemanına dönüştüren bir varlıktır. Fakat alışılmış olduğu için, fonksiyonlar için "$f(x)$ fonksiyonu", "$y = f(x)$ fonksiyonu" gibi gösterimler ve söylemler de kullanılabilir.

Eğer $A \subset R$, $B \subset R$ ve f de A dan B ye bir fonksiyon ise, bu fonksiyon bir reel değişkenli ve reel değerli fonksiyondur denir.

Reel değişkenli ve reel değerli bir f fonksiyonu verildiğinde, f nin tanım kümesi $f(x)$ ifadesini reel yapan tüm x noktalarının kümesidir.

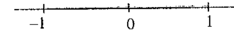
ÖRNEK :

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm :

$\sqrt{1 - x^2} \in R$ olması için $1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$ olmalıdır.

O halde verilen fonksiyonun tanım kümesi $[-1,1]$ aralığıdır.



$\sqrt{1 - x^2}$ nin tanım kümesi

$f : A \to B$ fonksiyonu verildiğinde $\{\ (x, f(x)\ ) : x \in A\}$ kümesine f nin grafiği denir. Bu noktalar $x\ O\ y$ düzleminde işaretlendiğinde fonksiyonun grafiği çizilmiş olur.

Reel değerli bir f fonksiyonu verildiğinde $f(x) = 0$ eşitliğini sağlayan x elemanlarına f fonksiyonunun sıfır yerleri veya kökleri denir.

> **TANIM :**
>
> f ve g aynı küme üzerinde tanımlı fonksiyonlar ve bu kümenin her x elemanı için $f(x) = g(x)$ ise, f ile g fonksiyonları eşittir denir ve $f = g$ biçiminde gösterilir.

ÖRNEK : $f : R \to R$, $f(x) = x^2 - 1$ ve $g : R \to R$, $g(x) = (x - 1)(x + 1)$ fonksiyonları eşittir, zira her $x \in R$ için

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

dir.

> **TANIM :**
>
> f ve g iki fonksiyon olsun. Bu iki fonksiyonun $f + g$ toplamı, $f - g$ farkı, $f.g$ çarpımı ve $\frac{f}{g}$ bölümü
>
> $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
>
> $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
>
> $(f\ .\ g)(x) = f(x) .\ g(x)$
>
> $(f\ /\ g)(x) = f(x)\ /\ g(x)$

şeklinde tanımlanır. Burada $f+g$, $f-g$ ve $f.g$ fonksiyonları f ve g fonksiyonlarının tanımlı olduğu tüm noktalarda, $f\,/\,g$ fonksiyonu da $g(x)=0$ denklemini sağlayan x ler hariç diğer tüm x ler için tanımlıdır. Bir f fonksiyonunun bir c sayısı ile çarpımı da

$$(c.f)\,(x) = c\,.f(x)$$

şeklinde tanımlanır.

ÖRNEK : $f: R \to R,\ f(x) = x^2$, $g: R \to R$, $g(x) = x - 1$

fonksiyonları için $f+g$, $f-g$, $f.g$ ve $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonlarını bulunuz. Bu fonksiyonların tanım kümelerini belirtiniz.

Çözüm :

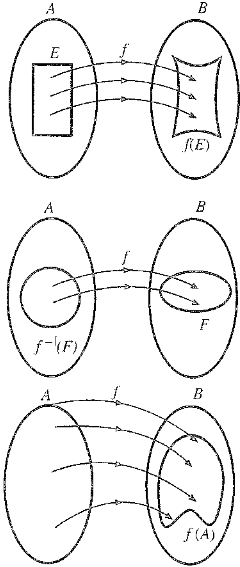
$$(f+g)\,(x) = x^2 + x - 1$$

$$(f-g)\,(x) = x^2 - x + 1$$

$$(f.\,g)\,(x) = x^2\,(x-1) = x^3 - x^2$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

olur. İlk üç fonksiyonun tanım kümesi R reel sayılar kümesi, son fonksiyonun tanım kümesi $R \setminus \{1\}$ dir.



TANIM :

$f: A \to B$ bir fonksiyon, $E \subset A$ ve $F \subset B$ olsun.

$$f(E) = \{\, f(x) : x \in E\}$$

kümesine E nin f altındaki görüntüsü,

$$f^{-1}\,(F) = \{x : f(x) \in F\}$$

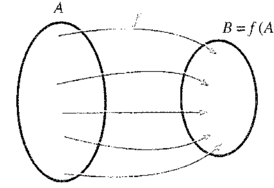
kümesine de F nin f altındaki ters görüntüsü denir.

$f(A)$ kümesine de fonksiyonun görüntü kümesi adı verilir.

Yandaki şekilden de görüldüğü gibi $f(A)$ görüntü kümesi B değer kümesinin alt kümesidir. Yani her $f: A \to B$ fonksiyonu için

$$f(A) \subset B$$

dir.

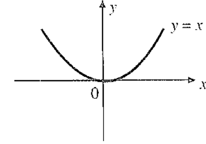


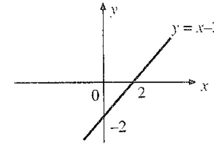
TANIM :

$f: A \to B$ fonksiyonu için

$$f(A) = B$$

oluyorsa f fonksiyonuna örten fonksiyon, aksi taktirde fonksiyona içine fonksiyon adı verilir. Buna göre eğer f örtense B nin herbir elemanı A daki en az bir elemanın görüntüsüdür.





ÖRNEK : R den R ye tanımlı $f(x) = x^2$ fonksiyonu içine fonksiyon, $g(x) = x - 2$ şeklinde tanımlanan $g: R \to R$ örten fonksiyondur.

Çünkü $f(R) = R^+ \cup \{0\} \neq R$ ve $g(R) = R$ dir. Bu iki fonksiyonun grafikleri yanda verilmiştir.

Ox eksenine paralel olarak çizilen doğrular $y = x^2$ parabolünü en az bir noktada keser mi? Aynı soruyu $y = x - 2$ doğrusu için cevaplandırınız. Bu sonuçlar grafiğini bildiğiniz fonksiyonların örten olup olmadığını anlamınıza yardımcı olabilir mi?

TANIM :

$f: A \to B$ fonksiyonu verildiğinde farklı elemanların görüntüleri de farklı ise f fonksiyonu birebirdir denir.

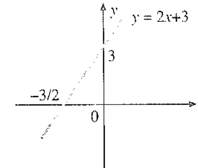
Bu tanım, sembollerle daha kısa olarak şöyle verilebilir :

(a) $[x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)] \Leftrightarrow f$ birebirdir.

(b) $[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2] \Leftrightarrow f$ birebirdir.

TANIM :

Bir f fonksiyonu hem birebir hem de örten ise f fonksiyonu birebir örtendir denir.



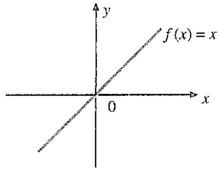
ÖRNEK : $f: R \to R,\ f(x) = 2x + 3$ fonksiyonu birebir örten midir?

Çözüm :

$x_1 \neq x_2$ ise, $2x_1 \neq 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 3 \neq 2x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ dir.

Şu halde f birebirdir. $y \in R$ verilmiş olsun. $2x + 3 = y$ olacak şekilde bir x reel sayısı vardır. Gerçekten $x = \dfrac{y-3}{2}$ olur.

Birebir bir fonksiyonun grafiği verildiğinde, $Ox-$ eksenine paralel olarak çizilen doğrular grafiği en fazla kaç noktada keser?



I_R fonksiyonunun grafiği

TANIM :

f, A dan A ya bir fonksiyon olsun. Her $x \in A$ için

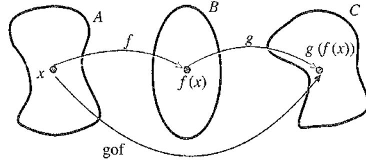
$$f(x) = x$$

ise f fonksiyonuna birim (özdeşlik) fonksiyon denir, I_A ile gösterilir.

I_R fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir.

TANIM :

$f : A \to B$ ve $g : B \to C$ fonksiyonları verilmiş olsun. Bu taktirde g fonksiyonu $f(A)$ daki her $f(x)$ elemanını C kümesinin bir $g(f(x))$ elemanına dönüştürür. Böylece A nın her bir x elemanını C nin bir $z = g(f(x))$ elemanına dönüştüren yeni bir fonksiyon elde edilir. Bu fonksiyona f ile g fonksiyonlarının bileşkesi denir ve gof ile gösterilir.



Bileşke Fonksiyonu

ÖRNEK : R den R ye tanımlı $f(x) = 3x - 1$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonları için $(gof)(x)$ ve $(fog)(x)$ ifadelerini bulunuz.

Çözüm :

$$(gof)\,(x) = g(f(x)) = g(3x - 1) = (3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$$

$$(fog)\,(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2 - 1$$

olur.

Yukarıdaki örnekten de görüldüğü gibi , genelde

$$fog \neq gof$$

dir.

TANIM :

$f : A \to B$ fonksiyonu birebir örten olsun.

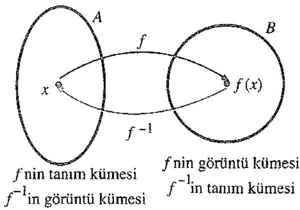
$$(gof)\,(x) = x \quad \text{ve} \quad (fog)\,(y) = y$$

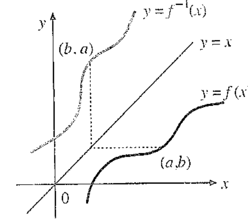
eşitliklerini sağlayan g fonksiyonuna f nin tersi denir, f^{-1} ile gösterilir.

Bu tanıma göre,

$$f^{-1} of = I_A \;; \quad fof^{-1} = I_B$$

olacaktır.





$A, B \subset R$ ve f, A dan B ye birebir örten bir fonksiyon olsun. $y = f^{-1}(x)$ denklemini elde etmek için $y = f(x)$ denkleminden x çekilip, x yerine y, y yerine x koymak gerekir. O halde (a,b) , $y = f(x)$ üzerinde bir nokta ise, (b,a), $y = f^{-1}(x)$ üzerinde bir noktadır. (a,b) ve (b,a) noktaları $y = x$ doğrusuna göre, simetrik noktalar olduğundan aşağıdaki önerme doğrudur :

$y = f(x)$ ve $y = f^{-1}(x)$ eğrileri $y = x$ doğrusuna göre simetriktirler.

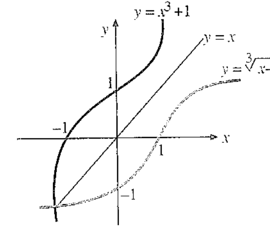
ÖRNEK : $f : R \to R$, $f(x) = x^3 + 1$ fonksiyonunun, eğer varsa tersini bulup grafiğini çiziniz.

Çözüm : f fonksiyonu birebir ve örten olduğundan tersi vardır.

$$y = x^3 + 1 \Rightarrow x^3 = y - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y - 1} \quad \text{olduğundan}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1}$$

olur.

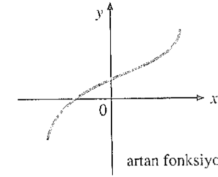


Bu fonksiyonun grafiği $y = x^3 + 1$ nin grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği olacağından yandaki gibi olacaktır.

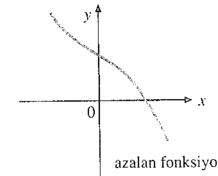
TANIM :

$A \subset R$ ve $f : A \to R$ bir fonksiyon olsun.

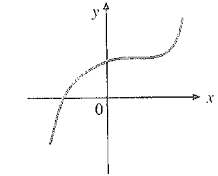
A nın bir E alt kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan her x_1, x_2 elemanları için $f(x_1) < f(x_2)$ ise f fonksiyonu E üzerinde artan, $f(x_1) \leq f(x_2)$ olursa azalmayandır denir. Benzer olarak, E kümesinin $x_1 < x_2$ şartını sağlayan x_1, x_2 elemanları için $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonu azalan, $f(x_1) \geq f(x_2)$ ise artmayandır denir. Bir aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyon tanım aralığının tamamı üzerinde artan veya azalan ise fonksiyona kesin olarak monotondur, artmayan veya azalmayansa monotondur denir. Eğer bir fonksiyonun tanımlı olduğu her sonlu aralık, fonksiyonun monoton olduğu, sonlu sayıda alt aralığa bölünebiliyorsa, bu fonksiyona parçalı monoton fonksiyon adı verilir.



artan fonksiyon



azalan fonksiyon



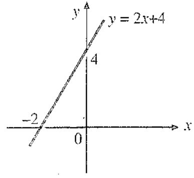
azalmayan fonksiyon

Verilen bir fonksiyonun grafiği çizildiğinde,

(a) Eğer fonksiyon kesin olarak monoton ise onun grafiği üzerinde alınan herhangi iki noktadan sağda bulunanı solda bulunanından daha "yukarıdadır."

(b) Eğer fonksiyon kesin olarak monoton azalan ise, grafik üzerinde alınan herhangi iki noktadan solda olanı sağda olanından daha "yukarıdadır",

(c) Eğer fonksiyon monoton azalmayan ise, onun grafiği üzerinde alınan iki noktadan solda olanı sağda olanın "yukarısında" olamaz.

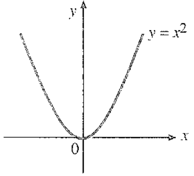


ÖRNEK : R de $f(x) = 2x + 4$ ve $g(x) = x^2$ biçiminde tanımlanan f ve g fonksiyonlarının monotonluk durumlarını inceleyiniz.

Çözüm :

$f(x) = 2x + 4$ ün grafiği yanda verilmiştir. Grafikten de görüldüğü gibi f fonksiyonu artandır.

Zira $x_1 < x_2$ ise, $2x_1 + 4 < 2x_2 + 4 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ olur.



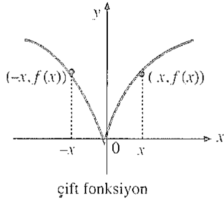
$g(x) = x^2$ fonksiyonu $(-\infty, 0)$ aralığında azalan, $[0, +\infty)$ aralığında artandır. Dolayısıyla bu fonksiyon monoton olmayıp parçalı monotondur.

TANIM :

Eğer $x \in A$ olduğunda $-x \in A$ oluyorsa, A kümesine bir simetrik küme denir. Simetrik bir A kümesi üzerinde tanımlanan bir f fonksiyonu için

$f(-x) = f(x)$ oluyorsa f fonksiyonu bir çift fonksiyondur denir.

Eğer her $x \in A$ için $f(-x) = -f(x)$ oluyorsa f fonksiyonu bir tek fonksiyondur denir.



çift fonksiyon

ÖRNEK : R den R ye tanımlı

$f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x + 2$, $k(x) = 0$

kurallarıyla verilen f, g, h ve k fonksiyonlarının hangileri tek, hangileri çifttir?

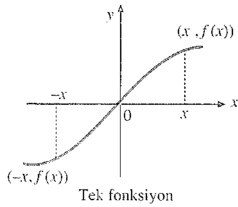
Çözüm :

Her $x \in R$ için $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$ olduğundan f çift fonksiyondur.

Her $x \in R$ için $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$ olduğundan g fonksiyonu tek fonksiyondur.

$h(-x) = -x + 2$ ifadesi ne $h(x)$ ne de $-h(x)$ olduğundan h fonksiyonu ne tek ne de çifttir.

$k(-x) = 0 = k(x)$ ve $k(-x) = 0 = -k(x)$ olduğundan $k(x) = 0$ fonksiyonu hem tek hem de çifttir.



Tek fonksiyon

f çift fonksiyon olduğunda, eğer $(x, f(x))$ noktası onun grafiğinin bir noktası ise, $(-x, f(x))$ noktası da grafiğin bir noktasıdır. Diğer taraftan $(x, f(x))$ ile $(-x, f(x))$ noktaları $y-$ eksenine göre simetrik olduğundan f nin grafiği $y-$ eksenine göre simetriktir.

Benzer düşünceyle, tek fonksiyonların grafiklerinin $O(0,0)$ orijin noktasına göre simetrik oldukları gösterilebilir.

PROBLEMLER

1. $A = \{0, 1, 4, 9\}$ ve $f(x) = \sqrt{x}$ olduğuna göre, $f(A)$ nedir?

2. $f(x) = 3x + 5$ için $f\left(\frac{1-x}{x}\right)$ nedir?

3. $f(2x) = 3x$ bağıntısını sağlayan f fonksiyonu için $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ve $f\left(\frac{2}{3}\right)$ değerlerini bulunuz.

4. Aşağıdaki reel değerli fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.
   (a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$
   (b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
   (c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$
   (d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$
   (e) $f(x) = \sqrt{\dfrac{4-x^2}{x}}$

5. $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \frac{1}{x}$ için aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.
   (a) $(f + g)(3)$ (b) $(f - g)(8)$
   (c) $(f.g)(-2)$ (d) $(2f + 3g)(15)$
   (ç) $2f^2(g) + 3g(\frac{1}{2})$ (f) $\frac{f}{g}(35)$
   (e) $f^2(24)$ (g) $\frac{f^2}{g}(g)$

6. $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x^2 - 1$ için aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.
   (a) $f(f(2))$ (b) $f(g(1))$
   (c) $g(f(-1))$ (d) $g(g(0))$
   (e) $g(f(1))$ (f) $f(f(f(0)))$

7. Aşağıdaki fonksiyonlar için $f + g$, $f - g$, $f.g$ ve $\frac{f}{g}$ fonksiyonlarını bulunuz.
   (a) $f(x) = x + 1$ $g(x) = x^2 + 2x - 3$
   (b) $f(x) = \sqrt{x}$ $g(x) = \sqrt{x-2}$
   (c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$
   (ç) $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = \sqrt{x}$

8. $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$, $g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ için $(fof)(x)$, $(fog)(x)$, $(gof)(x)$, $(gog)(x)$ ifadelerini hesaplayınız.

9. Her $x \in Z^+$ için, $f(x+1) = x^2 + f(x)$ bağıntısını sağlayan f fonksiyonu için $f(10) - f(1)$ ifadesini hesaplayınız.

10. Z^+ üzerinde $f(x+1) = x f(x)$ bağıntısını sağlayan f fonksiyonu için $\dfrac{f(36)}{f(1)}$ ifadesini hesaplayınız.

11. $|x| \leq 2$ için, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ olsun. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.
   (a) $f(-x) = f(x)$ (b) $f(a-2) = \sqrt{4a - a^2}$
   (c) $f(2b) = 2\sqrt{1 - b^2}$ (d) $f\left(\frac{1}{y}\right) = \dfrac{\sqrt{4y^2 - 1}}{y}$
   (e) $f\left(\frac{c}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - c^2}$

12. Her $x, y \in R^+$ için, $f(x.y) = f(x) + f(y)$ bağıntısını sağlayan f fonksiyonu için $f(1)$ nedir?

13. Her $x, y \in R$ için, $f(x+y) = f(x) \, . f(y)$

bağıntısını sağlayan f fonksiyonu için $f(0)$ nedir?

14. Aşağıdaki fonksiyonlardan hangileri birebirdir?

(a) $f: R \to R$, $f(x) = 5x + 1$

(b) $f: Z^- \to R$, $f(x) = x^2$

(c) $f: R \to R$, $f(x) = x^3 + x$

(d) $f: R \to R$, $f(x) = x^2 + 1$

15. Bir dairenin çevresini alanı cinsinden hesaplayınız.

16. Aşağıdaki bağıntılarla tanımlanan reel değişkenli ve reel değerli fonksiyonların tanım ve görüntü kümelerini bulunuz.

(a) $f(x) = 1 + x^2$ (b) $f(x) = \sqrt{-x}$

(c) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ (d) $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$

(e) $f(x) = -\frac{1}{x}$

17. f artan olduğunda $-f$ azalan, f azalan olduğunda $-f$ artandır, gösteriniz.

18. f, bir I aralığı üzerinde pozitif tanımlı olsun.

(a) f artandır $\Leftrightarrow \frac{1}{f}$ azalandır.

(b) f azalandır $\Leftrightarrow \frac{1}{f}$ artandır.

Önermelerinin doğruluğunu gösteriniz.

19. Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan

$f(x) = ax + b$ tipinde bir fonksiyon bulunuz.

(a) $f(x+1) = 2x$

(b) $f(2x+3) = 3x - 2$

(c) $f(1-x) = 5x + 1$

(d) $f(f(x)) = 4x + 3$

20. Aşağıdaki fonksiyonların hangileri tek, hangileri çifttir?

(a) $f(x) = 4$ (b) $f(x) = \frac{1}{x}$

(c) $f(x) = x^3 - x + 1$ (d) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3$

(e) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ (f) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

(g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

21. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

22. $f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)+f(-x)}{2}$

eşitliğinden yararlanarak, her fonksiyonun biri tek biri de çift olan iki fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

23. Aşağıdaki fonksiyonları biri tek biri de çift olan iki fonksiyonun toplamı şeklinde yazınız.

(a) $f(x) = \frac{2}{x^2 - x + 1}$

(b) $f(x) = (1+x)^{100}$

24. Öyle f ve g fonksiyonları bulunuz ki,

$f+g$ çift, $f-g$ tek olsun.

25. (a) f tek ise $-f$ tek midir?

(b) f tek ise $\frac{1}{f}$ tek midir?

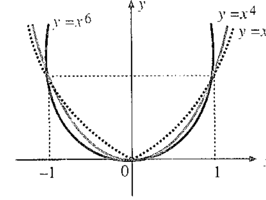
(c) f çift ise $\frac{1}{f}$ çift midir?

(d) f çift ise $-f$ çift midir?

26. Artan bir fonksiyonun tersinin de artan, azalan bir fonksiyon tersinin de azalan olacağını gösteriniz.

1.2 BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR

Bu kesimde çok kullanılan bazı fonksiyonları inceleyecek, daha sonra bu fonksiyonların tam kısmı, mutlak değeri ve işaretleri üzerinde duracağız.



Bazı çift kuvvet fonksiyonlarının grafiği

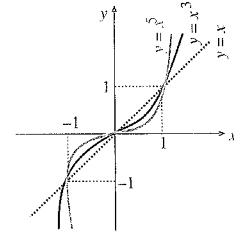
TANIM

$n \in N$ olmak üzere,

$f(x) = x^n$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlara kuvvet fonksiyonu adı verilir.

n çift olduğunda kuvvet fonksiyonu çift fonksiyon olup grafiği $Oy-$ eksenine göre simetriktir. n tek olduğunda kuvvet fonksiyonu tek fonksiyon olup, grafiği orijin noktasına göre simetriktir. Bazı kuvvet fonksiyonlarının grafikleri yanda verilmiştir.



Bazı tek kuvvet fonkiyonlarının grafikleri

TANIM

$n \in N$ ve $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ler de, $a_n \neq 0$ olmak üzere, sabit reel sayılar olsun.

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

biçiminde tanımlanan $p: R \to R$ fonksiyonuna bir polinom fonksiyon denir. Buradaki n doğal sayısına polinom derecesi, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sayılarına da polinomun katsayıları denir.

Bu tanıma göre, bir polinom fonksiyonu, bazı kuvvet fonksiyonlarının bazı sayılarla çarpılıp bunların toplanmasından oluşmuştur.

Örneğin $f(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci derece fonksiyonu $1, x, x^2$ kuvvet fonksiyonlarının, sırası ile c, b, a sayılarıyla çarpılıp elde edilenlerin toplanmasından ibarettir. Polinomlar şu temel özelliklere sahiptir :

(a) İki polinom fonksiyonunun toplamı ve çarpımı yine bir polinom fonksiyonudur.

(b) Eğer r sayısı n. dereceden bir p polinomunun m katlı bir kökü (sıfıryeri) ise $n-m$. dereceden öyle bir q polinomu vardır ki

$p(x) = (x-r)^m \, q(x)$

olur.

ÖRNEK : $p(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 = x^3 (x+1)(x^2+1)$ eşitliği ile verilen p polinomunun reel köklerini bulunuz.

Çözüm :

Kökler $x_1 = x_2 = x_2 = 0$, $x_4 = -1$ dir. Diğer iki kök reel değildir.

İki polinomun bölümü bir polinom olmayabilir. Bu tip fonksiyonlar başka bir sınıf oluştururlar.

TANIM

$q \neq 0$ olmak üzere

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonuna bir rasyonel fonksiyon denir.

Bir rasyonel fonksiyon paydayı sıfır yapan noktalar hariç diğer tüm noktalarda tanımlıdır.

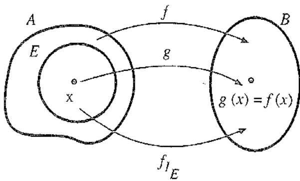
ÖRNEK : $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 3x^2 - 4x}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm : $x^3 - 3x^2 - 4x = x\,(x^2 - 3x - 4)$

$= x\,(x + 1)\,(x - 4)$

olduğundan fonksiyon $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 4$ noktalarında tanımsızdır. O halde tanım kümesi $R \setminus \{-1, 0, 4\}$ kümesidir.

Her $p(x)$ polinomu $p(x) = \dfrac{p(x)}{1}$ biçiminde yazılabildiğinden, her polinom bir rasyonel fonksiyondur.



TANIM

f, A dan B ye bir fonksiyon ve $E \subset A$ olsun.

Her $x \in E$ elemanına $g(x) = f(x)$ elemanını karşılık getiren g fonksiyonuna f nin E ye kısıtlanması denir, $f_{/_E}$ ile gösterilir.

Kısıtlanmada kural değişmemekte, ancak tanım kümesi daraltılmaktadır.

ÖRNEK : $f : R \to R$, $f(x) = 2x + 1$ fonksiyonu verilmiş olsun.

$g : N \to R$, $g(x) = 2x + 1$ fonksiyonu f nin N ye kısıtlanmasıdır. Dolayısıyla $g = f_{/_N}$ dir.

TANIM

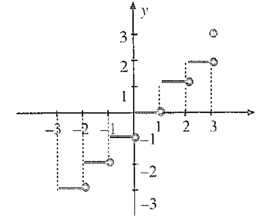
$A \subset R$ olsun.

$$f(x) = [\![x]\!]$$

şeklinde tanımlanan $f : A \to R$ fonksiyonuna tam kısım fonksiyonu adı verilir. Burada $[\![x]\!]$, x sayısından büyük olmayan tamsayıların en büyüğünü göstermektir.

$[\![x]\!]$, $n \le x$ eşitsizliğini gerçekleyen n tam sayılarının en büyüğünü gösterdiğinden, p bir tamsayı olmak üzere, $p \le x < p + 1$ eşitsizliğini sağlayan x reel sayıları için $[\![x]\!] = p$ dir. Buna göre

$-3 \le x < -2$ için	$[\![x]\!] = -3$,	$-2 \le x < -1$ için	$[\![x]\!] = -2$,
$-1 \le x < 0$ için	$[\![x]\!] = -1$,	$0 \le x < 1$ için	$[\![x]\!] = 0$,
$1 \le x < 2$ için	$[\![x]\!] = 1$,	$2 \le x < 3$ için	$[\![x]\!] = 2$



y = $[\![x]\!]$ in grafiği

ve $[\![3]\!] = 3$ olacağından $f(x) = [\![x]\!]$ şeklinde tanımlanan $f : [-3, 3] \to R$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir.

Şimdi tam kısım ifadesi ihtiva eden fonksiyonların grafikleri ile ilgili bazı örnekler verelim.

ÖRNEK : $y = x - [\![x]\!]$ eşitliği ile verilen $f : [\![-2,2]\!] \to R$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm : $-2 \le x < -1$ için $[\![x]\!] = -2$ olacağından $y = x + 2$ olur.

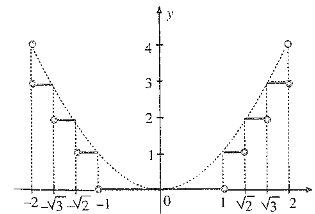
Benzer şekilde $-1 \le x < 0$ için $y = x + 1$, $0 \le x < 1$ için $y = x$, $1 \le x < 2$ için $y = x - 1$ ve $x = 2$ için $y = 0$ olacağından verilen fonksiyonun grafiği solda verilmiştir.

y = x − $[\![x]\!]$ in grafiği

ÖRNEK : $f : [-2,2] \to R$, $f(x) = [\![x^2]\!]$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm : $f(-x) = [\![(-x)^2]\!] = [\![x^2]\!] = f(x)$ olduğundan f çift fonksiyondur. Dolayısıyla grafiği y– eksenine göre simetriktir. Fonksiyonun [0,2] aralığındaki grafiği çizilip, elde edilen grafiğin Oy– eksenine göre simetriği alınabilir.

$0 \le x < 1$	için	$0 \le x^2 < 1$	$\Rightarrow$	$[\![x^2]\!] = 0$
$1 \le x < \sqrt{2}$	için	$1 \le x^2 < 2$	$\Rightarrow$	$[\![x^2]\!] = 1$
$\sqrt{2} \le x < \sqrt{3}$	için	$2 \le x^2 < 3$	$\Rightarrow$	$[\![x^2]\!] = 2$
$\sqrt{3} \le x < 2$	için	$3 \le x^2 < 4$	$\Rightarrow$	$[\![x^2]\!] = 3$
$x = 2$	için	$x^2 = 4$	$\Rightarrow$	$[\![x^2]\!] = 4$



olur. Buna uyan grafik yanda çizilmiştir.

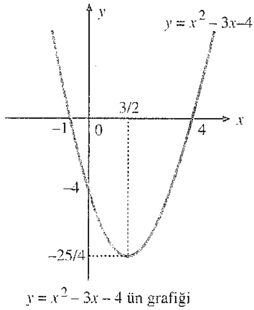
TANIM

$A \subset \mathbb{R}$ ve f, A dan $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun.

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \quad ise \\ -f(x), & f(x) < 0 \quad ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $|f|$ fonksiyonuna f fonksiyonunun mutlak değer fonksiyonu denir.

Yukarıdaki tanıma göre, $|f|$ nin grafiği, f nin negatif olmadığı yerde f nin grafiği ile aynıdır. f nin negatif olduğu bölgede $|f|$ nin grafiği f nin grafiğinin x– eksenine göre simetriğidir. Buna göre $y = |f(x)|$ in grafiğini çizmek için $y = f(x)$ in grafiği çizilir. x– ekseninin üst tarafında kalan eğri (noktalar) aynen bırakılır, x– ekseninin altında kalan parçaların x– eksenine göre simetriği alınır.



$y = x^2 - 3x - 4$ ün grafiği

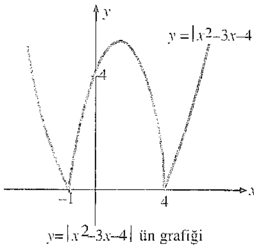
ÖRNEK : $y = |x^2 - 3x - 4|$ eğrisini çiziniz.

Çözüm : Önce $y = x^2 - 3x - 4$ eğrisini çizelim. $x = 0$ için $y = -4$,

$y = 0$ için $x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 4, \quad x_2 = -1$ bulunur.

Tepe noktası : $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{2}$, $y_0 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 - 3.\dfrac{3}{2} - 4 = -\dfrac{25}{4}$ olur.

Tepe noktası $T\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{25}{4}\right)$ dir.



$y = |x^2 - 3x - 4|$ ün grafiği

$y = |x^2 - 3x - 4|$ eğrisini çizmek için, Ox– ekseninin üst tarafında kalan kısım aynen bırakılır, alt tarafında kalan kısmın Ox– eksenine göre simetriği alınır.

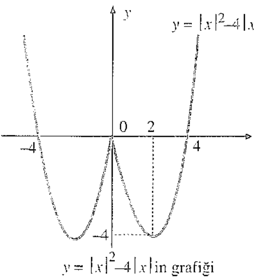
$y = |x^2 - 3x - 4|$ in grafiği yanda verilmiştir.

$y = f(|x|)$ Eğrisinin Çizimi

$y = f(|x|)$ eğrisini çizmek için, önce $y = f(x)$ eğrisinin $x \geq 0$ için grafiği çizilir. Bu eğrinin Oy– eksenine göre simetriği alınır.

ÖRNEK : $y = |x|^2 - 4|x|$ eğrisini çiziniz.

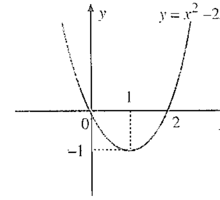
Çözüm : $y = x^2 - 4x$ eğrisi $x \geq 0$ için çizilir. Bunun Oy– eksenine göre simetriği alınarak çizim tamamlanır. Grafik yanda verilmiştir.



$y = |x|^2 - 4|x|$ in grafiği

$y = |f(|x|)|$ Eğrisinin Çizimi

$y = |f(|x|)|$ eğrisini çizmek için, önce $y = f(x)$ eğrisi çizilir, Oy– ekseninin solunda kalan parçası atılır. Diğer kısmın Oy– eksenine göre simetriği alınarak $y = f(|x|)$ eğrisi çizilir. Bu eğrinin Ox– ekseni altında kalan parçasının Ox– eksene göre simetriği alınarak çizim tamamlanır.



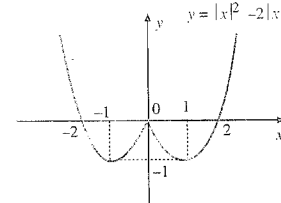
ÖRNEK : $y = \big||x^2| - 2|x|\big|$ eğrisini çiziniz.

Çözüm : Önce $y = x^2 - 2x$ eğrisi çizilir. $x = 0$ için $y = 0$,

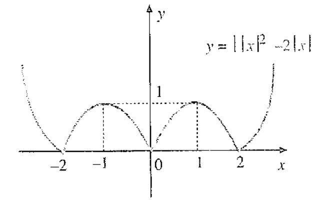
$x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 2$ olur.

$x_0 = 1, \quad y_0 = -1$ olacağından Tepe noktası $T(1, -1)$ noktasıdır.

Oy– ekseninin solunda kalan kısım atılıp sadaki parçanın Oy– eksenine göre simetriği alınır. Böylece $y = |x|^2 - 2|x|$ eğrisi çizilir. Ox– ekseninin üstünde kalan parça aynen bırakılır, eksenin altında kalan parçanın Ox– eksenine göre simetriği alınırsa $y = ||x|^2 - 2|x||$ eğrisi çizilmiş olur. Grafik yanda verilmiştir.



Reel değerli bazı fonksiyonların aldığı değerlerin pozitif veya negatif oluşu önem taşır. Bu sebeple işaret (signum) fonksiyonu denilen bir fonksiyon tanımlanır.



TANIM

$f, A \subset \mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olsun.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{|f(x)|}{f(x)}, & f(x) \neq 0 \quad ise \\ 0, & f(x) = 0 \quad ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan g fonksiyonuna f nin işaret fonksiyonu denir, $sgnf$ ile gösterilir.

f reel değerli olduğunda bir x noktasında ya $f(x) > 0$ ya $f(x) < 0$ veya $f(x) = 0$ dır. $f(x) > 0$ ise $\dfrac{|f(x)|}{f(x)} = 1$, $f(x) < 0$ ise $\dfrac{|f(x)|}{f(x)} = -1$ olacağından işaret fonksiyonu

$$(sgnf)(x) = sgn\, f(x) = \begin{cases} 1, & f(x) > 0 \quad ise \\ 0, & f(x) = 0 \quad ise \\ -1, & f(x) < 0 \quad ise \end{cases}$$

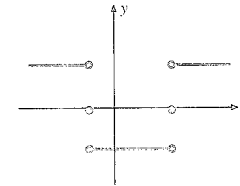
şeklinde de tanımlanabilir.

ÖRNEK : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ fonksiyonu veriliyor. $sgnf$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm : $x^2 - 2x - 3 = 0$ denkleminin kökleri $x_1 = -1$, $x_2 = 3$ dür. İşaret tablosu

x		−1		3	
$f(x)$	+	0	−	0	+

biçiminde olacaktır. Şu halde



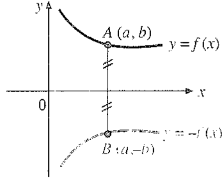
$$(sgnf)(x^2 - 2x - 3) = \begin{cases} 1, & x < -1 \ \ veya \ \ x > 3 \quad ise \\ 0, & x = -1 \ \ veya \ \ x = 3 \quad ise \\ -1, & -1 < x < 3 \quad ise \end{cases}$$

yazılabilir. Bunun grafiği yanda verilmiştir.

1.3 BAZI PRATİK ÇİZİMLER

Bu kesimde $y = f(x)$ eğrisi verildiğinde, bundan yararlanarak

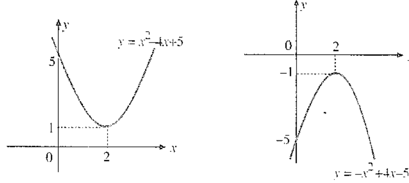
$y = -f(x)$, $y = f(-x)$, $y = f(x-p)$, $y = f(2p-x)$, $y = c\,f(x)$ ve $y = f(x) + k$ eğrilerinin grafiklerini çizeceğiz.



$y = -f(x)$ Eğrisinin Çizimi

$A(a,b)$ noktası $y = f(x)$ eğrisi üzerinde ise $B(a, -b)$ noktası da $y = -f(x)$ eğrisi üzerindedir. Diğer taraftan $B(a, -b)$ noktası $A(a,b)$ noktasının Ox– eksenine göre simetriği olduğundan, $y = -f(x)$ eğrisi $y = f(x)$ eğrisinin Ox– eksenine göre simetriğidir.

ÖRNEK : $y = x^2 - 4x + 5$ eğrisinin grafiği aşağıda verilmiştir. Bundan yararlanarak $y = -x^2 + 4x - 5$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

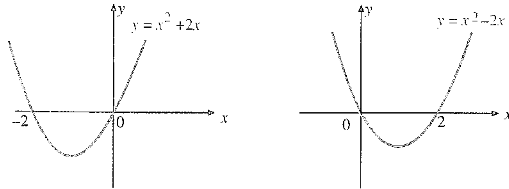


Çözüm : Verilen eğrinin Ox– eksenine göre simetriğini almak yeterdir. İstenilen grafik yukarıda verilmiştir.

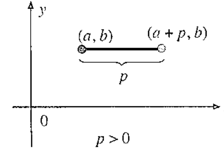
$y = f(-x)$ Eğrisinin Çizimi

$A(a,b)$ noktası $y = f(x)$ eğrisinin bir noktası ise $B(-a,b)$ noktası da $y = f(-x)$ eğrisinin bir noktasıdır. $B(-a,b)$ noktası $A(a,b)$ noktasının Oy– eksenine göre simetriği olduğundan $y = f(-x)$ eğrisi $y = f(x)$ in Oy– eksenine göre simetriğidir.

ÖRNEK : $y = x^2 + 2x$ eğrisinin grafiği aşağıda verilmiştir. Bundan yararlanarak $y = x^2 - 2x$ eğrisinin grafiğini çiziniz.



Çözüm : $f(x) = x^2 + 2x$ ise $f(-x) = x^2 - 2x$ dir. O halde $y = x^2 + 2x$ eğrisinin Oy– eksenine göre simetriğini almak yetecektir.



$y = f(x-p)$ Eğrisinin Çizimi

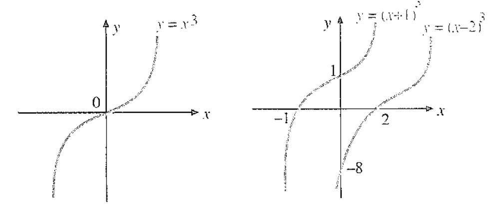
$A(a,b)$ noktası $y = f(x)$ üzerinde bir nokta ise $B(a + p, b)$ noktası $y = f(x-p)$ üzerinde bir noktadır.

$B(a + p, b)$ noktası, p pozitif ise $A(a,b)$ nin p kadar sağında, p negatif ise $A(a,b)$ nın $|p|$ kadar solundadır.

O halde $y = f(x-p)$ eğrisini çizmek için, $y = f(x)$ eğrisini, $p > 0$ ise p kadar sağa, $p < 0$ ise $|p|$ kadar sola kaydırmak yeterdir.

ÖRNEK : $y = x^3$ eğrisinin grafiği aşağıda verilmiştir. Bundan yararlanarak $y = (x-2)^3$ ve $y = (x+1)^3$ eğrilerini çiziniz.

Çözüm : $y = x^3$ eğrisi 2 birim sağa kaydırılırsa $y = (x-2)^3$ eğrisi, 1 birim sola kaydırılırsa $y = (x+1)^3$ eğrisi elde edilir.

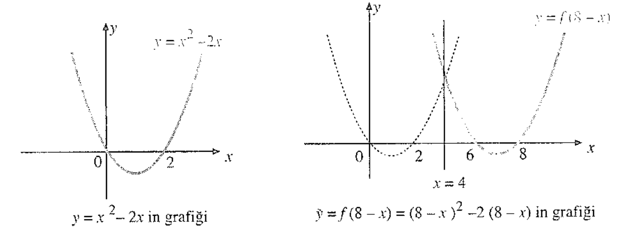


$y = f(2p-x)$ Eğrisinin Çizimi

$A(a,b)$ noktası $y = f(x)$ eğrisi üzerinde ise $B(2p-a, b)$ noktası $y = f(2p-x)$ eğrisi üzerindedir.

Bu iki nokta $x = p$ doğrusuna göre simetrik olduğundan $y = f(2p-x)$ in grafiği $y = f(x)$ in grafiğinin $x = p$ doğrusuna göre simetriğidir.

ÖRNEK : $y = f(x) = x^2 - 2x$ eğrisinin grafiği yanda verilmiştir. Bundan yararlanarak $y = f(8-x)$ eğrisini çiziniz.



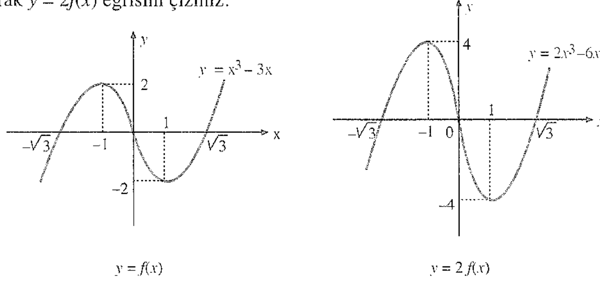
Çözüm :

$2p = 8$ olduğundan $p = 4$ dür. $y = f(8 - x)$ in grafiği verilen eğrinin $x = 4$ doğrusuna göre simetriğidir.

$y = c.f(x)$ Eğrisinin Çizimi

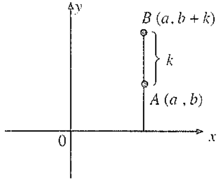
$A(a,b)$ noktası $y = f(x)$ üzerinde ise $B(a,cb)$ noktası da $y = cf(x)$ eğrisi üzerindedir. O halde $y = cf(x)$ eğrisini çizmek için $y = f(x)$ eğrisinin her noktasının ordinatını c ile çarpmak gerekir.

ÖRNEK : $y = x^3 - 3x$ eğrisinin grafiği aşağıda verilmiştir. Bundan yararlanarak $y = 2f(x)$ eğrisini çiziniz.



Çözüm : Fonksiyonunun her noktada aldığı değer 2 ile çarpılırsa istenen grafik elde edilir.

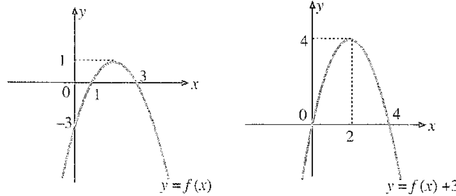
$y = f(x) + k$ Eğrisinin Çizimi



$A(a,b)$ noktası $y = f(x)$ eğrisi üzerinde ise $B(a, b + k)$ noktası $y = f(x) + k$ üzerindedir. $k > 0$ için $B(a, b + k)$ noktası $A(a,b)$ nin k birim yukarısında, $k < 0$ için k birim aşağısındadır. Buna göre $y = f(x) + k$ eğrisini çizmek için $y = f(x)$ eğrisini, $k > 0$ için k birim yukarıya, $k < 0$ için k birim aşağıya kaydırmak yetecektir.

ÖRNEK : $y = f(x) = -x^2 + 4x - 3$ fonksiyonunun grafiği yanda verilmiştir. Bundan yararlanarak $y = f(x) + 3$ eğrisini çiziniz.

Çözüm : Verilen eğrinin herbir noktasını 3 birim yukarı kaydırmak yeterdir.



1. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : R \rightarrow R$ fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.
   (a) $f(x) = |x - 1|$
   (b) $f(x) = |2x|$
   (c) $f(x) = |x + 2| + 1$
   (d) $f(x) = 2\,|x + 1|$

2. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : R \rightarrow R$ fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.
   (a) $f(x) = |x| + |x - 1|$
   (b) $f(x) = 2\,|x - 1| + 3\,|x + 1|$
   (c) $f(x) = |x + 1| + |x| + |x - 1|$

3. $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$ eşitliği ile tanımlanan fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Bu fonksiyonunun görüntü kümesini bulunuz.

4. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : [-2,2] \rightarrow R$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.
   (a) $f(x) = [\![-x]\!]$ (b) $f(x) = [\![2x]\!]$
   (c) $f(x) = \left[\!\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\!\right]$ (d) $f(x) = 2[\![x]\!]$
   (e) $f(x) = -3[\![x]\!]$ (f) $f(x) = |\,[\![x]\!]\,|$
   (g) $f(x) = [\![\,|x|\,]\!]$

5. Aşağıdaki fonksiyonların tanım kümesini bulunuz.
   (a) $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$
   (b) $f(x) = \sqrt{|x - 1| - 2}$
   (c) $f(x) = \sqrt{|x| + 4}$
   (d) $f(x) = \sqrt{1 - [\![x]\!]}$
   (e) $f(x) = \dfrac{x}{[\![x]\!]}$

6. $f(x) = \sqrt{x - [\![x]\!]}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

7. Aşağıda verilen f fonksiyonları için

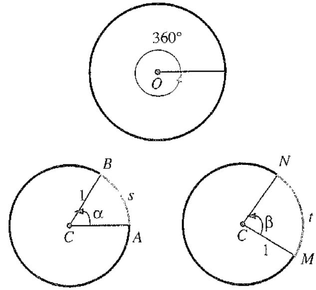
   $g(x) = sgn\, f(x)$

   fonksiyonlarının grafiğini çiziniz.
   (a) $f(x) = 2x - 4$
   (b) $f(x) = x^2 - 4$
   (c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$
   (ç) $f(x) = x^3 + x^2$
   (d) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$
   (e) $f(x) = \sqrt{x - [\![x]\!]}$
   (f) $f(x) = [\![x]\!]$

8. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ olduğuna göre, aşağıdaki fonksiyonların grafiğini çiziniz.
   (a) $g(x) = f(|x|)$
   (b) $h(x) = |\,f(x)\,|$
   (c) $k(x) = |\,f(|x|)\,|$

9. $f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun grafiğinden yararlanarak aşağıda denklemleri verilen eğrileri çiziniz.
   (a) $y = 2\,f(x)$
   (b) $y = f(x - 2)$
   (c) $y = -f(x)$
   (d) $y = -3\,f(x)$
   (e) $y = f(x + 3)$
   (f) $y = f(x) + 1$
   (g) $y = f(x - 1) + 2$
   (h) $y = f(4 - x)$

1.4 TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR



Bu kesimde önce, temel trigonometrik oranları ve bunlar arasındaki bağıntıları hatırlatacağız. Bilindiği gibi, açı ölçüsü birimlerinden biri derecedir. 1 derece bir çemberin merkez açısının tamamının ölçüsünün 360 da biridir. Açıları başka birimlerle de ölçmek mümkündür. Yarıçapı 1 birim olan çemberi (birim çemberi) gözönüne alalım. Bu çemberde herbir merkez açıya bir çember yayı uzunluğu karşılık gelir.

Şekilde ölçüsü α olan açıya karşılık gelen AB yayının uzunluğu s, ölçüsü β olan açıya karşılık gelen MN yayının uzunluğu t dir. $\alpha \neq \beta$ için $s \neq t$ dir.

Birim çemberde, verilen bir açıya karşılık gelen yayın uzunluğuna o açının radyan olarak ölçüsü denir.

Yarıçapı 1 birim olan çemberin çevresi $2\pi \cdot 1 = 2\pi$ birim, merkez açısının ölçüsü 360° olduğundan

$$2\pi \text{ radyan} = 360°$$

dir. Buna göre,

$$1 \text{ radyan} = \frac{360}{2\pi} \cong 57° \ , \ 1 \text{ derece} = \frac{2\pi}{360} \cong 0{,}02 \text{ radyan olur.}$$

Bu bağıntılardan yararlanarak, derece cinsinden verilen tüm ölçüler radyan, radyan cinsinden verilen tüm ölçüler derece cinsinden yazılabilir. En çok kullanılan derece ve bunlara karşılık gelen radyanlar liste halinde aşağıda verilmiştir.

Derece	0	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
Radyan	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Aynı merkezli bir birim çemberle, bir r yarıçaplı çember çizelim.

CAD ve CBE daire dilimleri benzer olduğundan

$$\frac{\theta}{|CA|} = \frac{s}{|CB|} \Rightarrow \frac{\theta}{1} = \frac{s}{r}$$

dır. Buradan

$$s = r\,\theta$$

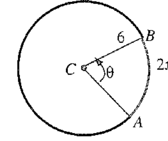
bulunur.

ÖRNEK : Bir çember 6 eş parçaya bölünüyor. Bir yaya karşılık gelen merkez açının ölçüsünü radyan cinsinden yazınız.

Çözüm : Merkez açının tamamının ölçüsü 2π radyan olduğundan bir parçaya karşılık gelen merkez açının ölçüsü

$$\theta = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

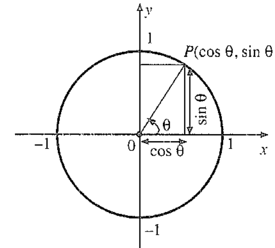
radyandır.



ÖRNEK : Yarıçapı 6 birim olan bir çemberde bir merkez açıya karşılık gelen yayın uzunluğu 2π birim olduğuna göre, merkez açının ölçüsü kaç radyandır?

Çözüm : $s = r\theta \Rightarrow 2\pi = 6\,\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ radyan

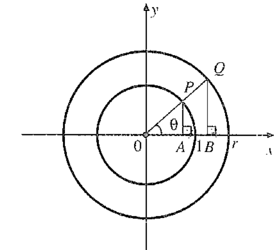
olur.



Merkezi orijinde ve yarıçapı 1 birim olan çemberi çizelim. Bir kenarı $[OK]$ olan ve ölçüsü θ olan açıyı çizelim. Bu durumda çember üzerinde bir P noktası elde edilir. P noktasının apsisi $\cos\theta$ (kosinüs θ), ordinatı $\sin\theta$ (sinüs θ) olarak tanımlanır. Böylece herbir θ sayısına bir $\cos\theta$ ve bir $\sin\theta$ sayısı karşılık gelir. Şekilden de görüldüğü gibi

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1, \ -1 \leq \cos\theta \leq 1$$

dır.



Şimdi, $O(0,0)$ merkezli birim çemberle r yarıçaplı bir çember çizelim.

θ ölçülü açının bir kenarının çemberleri kestiği noktalar P ve Q olsun.

$$\sin\theta = |AP| \ , \quad \cos\theta = |OA|$$

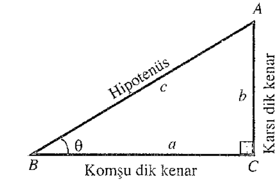
dır. $\overset{\triangle}{POA}$ ve $\overset{\triangle}{QOB}$ üçgenlerinin benzerliğinden

$$\frac{|AP|}{|OP|} = \frac{|BQ|}{|OQ|} \Rightarrow \frac{\sin\theta}{1} = \frac{|BQ|}{r} \Rightarrow \sin\theta = \frac{|BQ|}{r}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\cos\theta = \frac{|OB|}{r}$$

olur. Şu halde bir dik üçgende



$$\sin\theta = \frac{\text{karşı dikkenar uzunluğu}}{\text{hipotenüs uzunluğu}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{komşu dikkenar uzunluğu}}{\text{hipotenüs uzunluğu}} = \frac{a}{c}$$

olur.

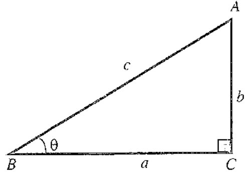
Sinüs ve kosinüsten başka en çok kullanılan diğer dört oran tanjant, kotanjant, sekant, kosekanttır.

Bunlar aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \ , \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \ , \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}.$$

Yukarıdaki ifadelerin tanımlı olması için paydalarının sıfırdan farklı olması gerekir.



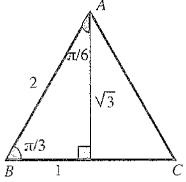
Yandaki dik üçgene göre,

$$\cos\theta = \frac{a}{c}\ ,\ \sin\theta = \frac{b}{c}\ ,\ \tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$\sec\theta = \frac{c}{a}\ ,\ \csc\theta = \frac{c}{b}\ ,\ \cot\theta = \frac{a}{b}$$

olur.

Herhangi bir θ verildiğinde, ona karşılık gelen trigonometrik değerleri hesaplamak kolay olmayabilir. Bu nedenle bunlar için trigonometri cetvelleri denilen bazı cetveller verilmiştir. Fakat bazı özel θ değerleri için bu ifadeleri hesaplamak çok kolaydır.



Bir kenarının uzunluğu 2 birim olan bir eşkenar üçgen ile bunun bir yüksekliğini çizelim.

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ,\ \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\ ,\quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\ ,\ \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ ,\ \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

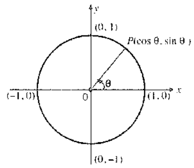
olur.

Şimdi, bir dikkenar uzunluğu 1 birim olan diküçgeni çizelim. Dar açıların ölçüleri $\frac{\pi}{4}$ radyandır. Buna göre

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

olur.

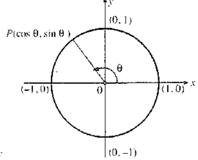
Şimdi birim çemberi gözönüne alarak, trigonometrik oranların değerlerini ve işaretlerini inceleyelim.



I. Bölgede bir noktanın apsis ve ordinatları pozitif olduğundan, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ için

$$\cos\theta > 0,\quad \sin\theta > 0$$

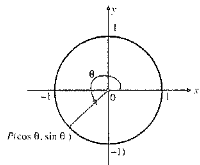
dır.



II. Bölgede apsisler negatif, ordinatlar pozitif olduğundan $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ için

$$\cos\theta < 0,\quad \sin\theta > 0$$

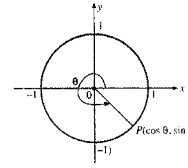
olur.



III. Bölgede apsis ve ordinatlar negatif olduğundan, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ için

$$\cos\theta < 0,\quad \sin\theta < 0$$

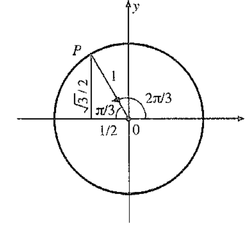
olur.



IV. Bölgede apsisler pozitif, ordinatlar negatif olduğundan, $3\frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi$ için

$$\cos\theta > 0,\quad \sin\theta < 0$$

olur.



ÖRNEK : $\cos\frac{2\pi}{3}$ ve $\sin\frac{2\pi}{3}$ ifadelerini hesaplayınız.

Çözüm : $\frac{2\pi}{3}$ ölçülü açıya karşılık gelen nokta II. bölgededir. P noktasının koordinatları $x = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ olacağından

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\ ,\quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

bulunur.

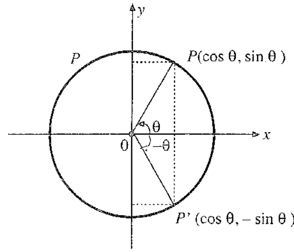
Yukarıdaki örnekten de görüldüğü gibi

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \ \text{ ve } \ \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$$

dır. Bu yol izlenerek birçok özel açının trigonometrik oranları hesaplanabilir. Bu özel değerlerin trigonometrik oranlarını bir tablo halinde verelim.

θ	sinθ	cosθ	tanθ	cotθ
0	0	1	0	tanımsız
π/6	1/2	√3 / 2	1 / √3	√3
π/4	√2 / 2	√2 / 2	1	1
π/3	√3 / 2	1/2	√3	1 / √3
π/2	1	0	tanımsız	0
2π/3	√3 / 2	−1/2	−√3	− 1 / √3
3π/4	√2 / 2	−√2 / 2	−1	−1
5π/6	1/2	−√3 / 2	− 1 / √3	−√3
π	0	−1	0	tanımsız

Trigonometrik oranlar arasındaki temel bağıntılar aşağıda verilmiştir.



Birim çemberden

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

olduğu açıktır. $(x, -y)$ noktası (x,y) noktasının Ox– eksenine göre simetriği olduğundan

$$\cos(-\theta) = \cos\theta\ , \quad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$

bulunur.

İki yayın toplamının trigonometrik oranları

$$\cos(\theta + \gamma) = \cos\theta\cos\gamma - \sin\theta\sin\gamma$$

$$\sin(\theta + \gamma) = \sin\theta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\theta$$

$$\tan(\theta + \gamma) = \frac{\tan\theta + \tan\gamma}{1 - \tan\theta\tan\gamma}$$

bağıntıları yardımıyla hesaplanır. Burada γ yerine $-\gamma$ konur ve $\cos(-\gamma) = \cos\gamma$, $\sin(-\gamma) = -\sin\gamma$ olduğu gözönüne alınırsa, iki yayın farkının trigonometrik oranları

$$\cos(\theta - \gamma) = \cos\theta\cos\gamma + \sin\theta\sin\gamma$$

$$\sin(\theta - \gamma) = \sin\theta\cos\gamma - \sin\gamma\cos\theta$$

$$\tan(\theta - \gamma) = \frac{\tan\theta - \tan\gamma}{1 + \tan\theta\tan\gamma}$$

bağıntılarıyla hesaplanabilir.

Toplam formüllerinde $\gamma = \theta$ konursa, iki kat formülleri denilen aşağıdaki bağıntılar elde edilir :

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$= 2\cos^2\theta - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan i}{1 - \tan^2 i}$$

Yukarıdaki yayların toplam ve farkı için verilen bağıntılar taraf tarafa toplanıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\sin\alpha\ \sin\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

bağıntıları elde edilir. Birinci ve üçüncü bağıntılarda $\alpha + \beta = p$, $\alpha - \beta = q$ konursa

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\ \cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\ \cos\frac{p-q}{2}$$

eşitlikleri elde edilir.

Herbir x yay uzunluğuna bir $\sin x$ ve bir $\cos x$ karşılık geldiğinden

$$f(x) = \sin x \ \text{ ve } \ g(x) = \cos x$$

fonksiyonlarına ve bunlar yardımıyla tanımlanan

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\ , \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}\ ,$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}\ , \quad \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

fonksiyonlarına trigonometrik fonksiyonlar adı verilir.

TANIM

$f : A \to R$ fonksiyonu verilmiş olsun.

Her $x \in R$ için

$$f(x + T) = f(x)$$

olacak şekilde bir pozitif T sayısı varsa f fonksiyonu bir periyodik fonksiyon, T sayısına da f nin bir periyodudur denir. T sayılarının bir en küçüğü varsa bu en küçük periyoda fonksiyonun esas periyodu veya kısaca periyodu denir.

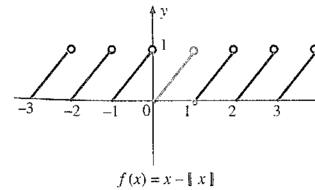
ÖRNEK : $f(x) = x - [\![x]\!]$ fonksiyonu periyodik midir? Periyodik ise esas periyodunu bulunuz.

Çözüm : m bir pozitif tamsayı ise

$$f(x + m) = x + m - [\![x + m]\!] = x + m - ([\![x]\!] + m)$$

$$= x + m - [\![x]\!] - m = x - [\![x]\!] = f(x)$$

olur. Şu halde her pozitif tamsayı birer periyottur. Bunların en küçüğü 1 olduğuna göre, f nin esas periyodu 1 dir. Şu halde $f(x) = x - [\![x]\!]$ in grafiğini 1 birim uzunluğundaki bir aralıkta çizmek yeterdir. Zira diğer parçalar bunun arka arkaya kopyalanmasından ibaret olacaktır. Verilen fonksiyonun $[0,1]$ aralığındaki grafiğini çizelim.



$f(x) = x - [\![x]\!]$

$0 \le x < 1$ için $[\![x]\!] = 0$ olduğundan $f(x) = x$ olur. $x = 1$ için $f(x) = 0$ dır.

ÖRNEK : $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun periyodik olduğunu gösterip esas periyodunu bulunuz. Bundan yararlanarak $f : R \to R$, $f(x) = \sin x$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm :

$$f(x + T) = f(x) \Rightarrow \sin(x + T) = \sin x \Rightarrow$$

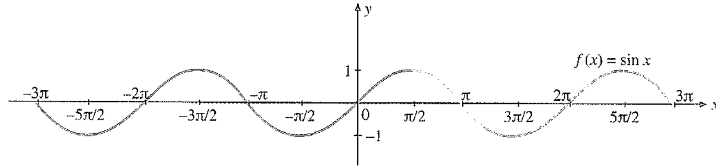
$$\sin x \cos T + \cos x \sin T = \sin x \Rightarrow$$

$$\cos T = 1 \text{ ve } \sin T = 0 \text{ olmalı } \Rightarrow T = k.2\pi$$

olur. Şu halde 2π nin tüm tamkatları birer periyottur. Bunların en küçüğü 2π olduğundan $f(x) = \sin x$ in esas periyodu 2π dir. Şu halde $[0,2\pi]$ aralığında çizim yapmak yeterdir. Diğer parçalar bu parçanın tekrarından ibaret olacaktır.

$[0,2\pi]$ aralığındaki özel değerler için bulunan noktalar birleştirilerek eğri çizilir.

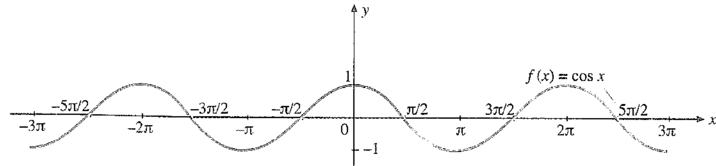
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

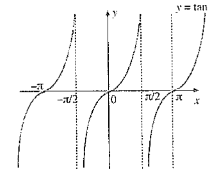


$f(x) = \cos x$ fonksiyonunun da esas periyodunun 2π olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

olduğundan, $f(x) = \cos x$ in grafiğini çizmek için $\sin x$ eğrisinin herbir noktasını $\frac{\pi}{2}$ kadar sola kaydırmak yeter. Böylece aşağıdaki grafik elde edilir.

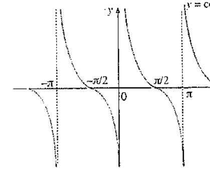




$f(x)$ = tan$x$ in grafiği

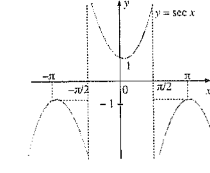
$f(x) = \tan x$ fonksiyonunun periyodu π olup, grafiği yanda verilmiştir.

$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ olduğundan, bu fonksiyon $\cos x \neq 0$ için tanımlıdır. $\cos x = 0$ denkleminin kökleri, k tamsayı olmak üzere, $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ sayılarıdır. O halde $\tan x$ fonksiyonu $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ noktalarında tanımsızdır. $\tan x$ tek fonksiyon olduğundan grafiği orijine göre simetriktir.



$f(x)$ = cot$x$ in grafiği

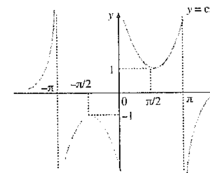
$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ fonksiyonu $x \neq k\pi$ için tanımlıdır. Bunun esas periyodu π dir. Grafik yanda verilmiştir. $\cot x$ tek fonksiyon olduğundan grafiği orijine göre simetriktir.



$f(x)$ = sec$x$ in grafiği

$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$, $x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $(k \in Z)$ fonksiyonu 2π periyodlu bir fonksiyondur. Ayrıca çift fonksiyon olduğundan grafiği Oy– eksenine göre simetriktir.

Fonksiyonun grafiği yanda verilmiştir.



$f(x)$ = csc$x$ in grafiği

$f(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x}$, $x \neq k\pi$ $(k \in Z)$ fonksiyonu 2π periyotludur. Ayrıca tek fonksiyon olduğundan grafik orijine göre simetriktir. Fonksiyonun grafiği yanda verilmiştir. Trigonometrik fonksiyonların esas periyotlarını aşağıdaki teorem yardımıyla kolayca bulabiliriz.

TEOREM 1.1 :

m bir pozitif tamsayı a ve b, $a \neq 0$ olmak üzere reel sayılar olsun.

(1) $\sin x$ ve $\cos x$ in periyodu 2π,

(2) $\tan x$ ve $\cot x$ in periyodu π,

(3) $\sin(ax + b)$ ve $\cos(ax + b)$ nin periyodu $\frac{2\pi}{|a|}$,

(4) $\tan(ax + b)$ ve $\cot(ax + b)$ nin periyodu $\frac{\pi}{|a|}$,

(5) $\sin^{2m}(ax + b)$ ve $\cos^{2m}(ax + b)$ nin periyodu $\frac{\pi}{|a|}$,

(6) $\sin^{2m-1}(ax + b)$ ve $\cos^{2m-1}(ax + b)$ nin periyodu $\frac{2\pi}{|a|}$,

(7) $\tan^{m}(ax + b)$ ve $\cot^{m}(ax + b)$ nin periyodu $\frac{\pi}{|a|}$ dır.

ÖRNEK : $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ in esas periyodunu bulunuz.

Çözüm : $\sin^4 x$ ve $\cos^4 x$ in esas periyodu π dir.

Şu halde f nin bir periyodu π dir. Fakat bunun esas periyot olması gerekmez.

Gerçekten

$$f(x+\frac{\pi}{2}) = \sin^4(x+\frac{\pi}{2}) + \cos^4(x+\frac{\pi}{2})$$

$$= (\sin x \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \sin\frac{\pi}{2})^4 + (\cos x \cos\frac{\pi}{2} - \sin x \sin\frac{\pi}{2})^4$$

$$= \cos^4 x + \sin^4 x = f(x)$$

olduğundan $\frac{\pi}{2}$ de bir periyottur.

ÖRNEK : $f(x) = \sin^2 x$ ve $g(x) = \cos^2 x$ fonksiyonlarının periyotlarını bulunuz.

$f(x) + g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ periyodik midir? Bu fonksiyonun esas periyodu var mıdır?

Çözüm : $f(x) = \sin^2 x$ ve $g(x) = \cos^2 x$ fonksiyonunun periyodu π dir.

$f(x) + g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dir. Bu fonksiyon periyodiktir.

Çünkü her $T > 0$ için $f(x+T) + g(x+T) = f(x) + g(x) = 1$ dir.

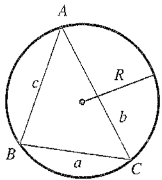
Her pozitif T sayısı bir periyottur. Pozitif reel sayıların en küçüğü mevcut olmadığından esas periyot yoktur.

Yukarıdaki iki örnekten şu sonuç çıkarılabilir :

SONUÇ 1.1 :

f ve g nin esas periyodu T ise $f \pm g$ nin de bir periyodu T dir, fakat bu T esas periyot olmayabilir. Hatta $f \pm g$ nin esas periyodu olmayabilir.

Genel Matematik derslerinde kullanılan iki önemli teoremi ispatsız olarak ifade edelim. Bunların ispatı Orta öğretim kitaplarında bulunmaktadır.



TEOREM 1.2 (Sinüs Teoremi) :

ABC üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı R olsun.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

dir.

ÖRNEK : Bir ABC üçgeninde $m(\hat{A}) = 75°$, $m(\hat{B}) = 60°$, $|AB| = c = 8$ br olduğuna göre $|AC|$ kenar uzunluğunu bulunuz.

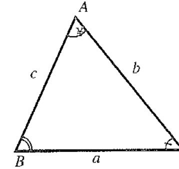
Çözüm : $m(\hat{C}) = 180° - (m(\hat{A}) + m(\hat{B}))$

$= 180° - (75° + 60°)$

$= 45°$ olur.

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{b}{\sin 60} = \frac{8}{\sin 45} \Rightarrow \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow b = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{6} \text{ br olur.}$$



TEOREM 1.3 (Kosinüs Teoremi) :

Bir ABC üçgeninde, $|BC| = a$, $|AC| = b$ ve $|AB| = c$ olsun.

Üçgenin köşe açılarının ölçüleri A, B, C ise

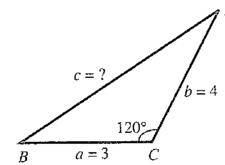
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

dir.

ÖRNEK : Bir ABC üçgeninde $a = 3$ birim, $b = 5$ birim ve $m(\hat{C}) = 120°$ ise, c kaç birimdir?



Çözüm : Kosinüs teoreminden

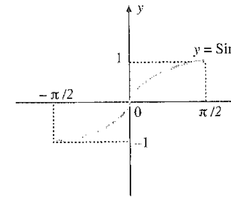
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$= 9 + 25 - 2.3.5.\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 9 + 25 + 15 = 49$$

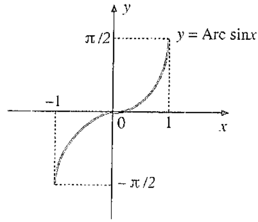
olur. O halde $c = 7$ birimdir.

1.5 TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLAR



sin: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ fonksiyonunun grafiği

$f(x) = \sin x$ fonksiyonu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığına kısıtlanır, değer kümesi olarak $[-1,1]$ aralığı alınırsa, bu fonksiyon birebir örten bir fonksiyon olur. Bu fonksiyonun grafiği yanda çizilmiştir. Bu eğri $y = \sin x$ eğrisinin $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığına karşılık gelen parçasından ibarettir. Bu fonksiyonun tersine arksinüs fonksiyonu denir, kısaca arcsin veya $\sin^{-1}$ ile gösterilir. Şu halde arksinüs fonksiyonu, tanım kümesi



arcsin : $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

fonksiyonunun grafiği

$[-1,1]$ ve değer kümesi $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ olan bir fonksiyondur. Ters fonksiyonun grafiği, esas fonksiyonun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği olacağından,

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

fonksiyonunun grafiği yandaki gibi olacaktır.

Yukarıdaki açıklamalara göre

$$u = \arcsin v \Leftrightarrow \sin u = v \text{ ve } u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

olacaktır.

ÖRNEK : $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ ve $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ ifadelerini hesaplayınız.

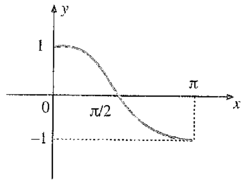
Çözüm :

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = u \Leftrightarrow \sin u = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \text{ olur.}$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = t \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = \sin t \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

Benzer şekilde, kosinüs fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığına kısıtlanması olan

$$\cos : [0, \pi] \to [-1,1]$$



cos : $[0,\pi] \to [-1, 1]$ fonksiyonunun grafiği

fonksiyonu birebir örten olduğundan tersi vardır. Bu ters fonksiyona arkkosinüs fonksiyonu denir. Arccos$x$ in anlamı kosinüsü x olan yay demektir. Buna göre,

$$u = \arccos v \Leftrightarrow \cos u = v \text{ ve } u \in [0,\pi]$$

olacaktır.

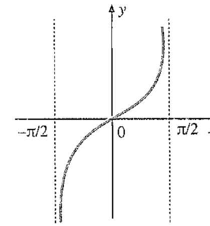
arcos : $[-1,1] \to [0,\pi]$ fonksiyonunun grafiği

ÖRNEK : Arccos 1 ve $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ifadelerini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\arccos 1 = u \Leftrightarrow 1 = \cos u \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow \arccos 1 = 0$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = t \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos t \Leftrightarrow t = \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$



tan : $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$ fonksiyonunun grafiği

Aynı şekilde tanjant fonksiyonunun $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığına kısıtlanması olan

$$\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to R$$

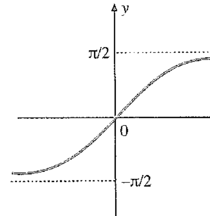
fonksiyonunun

$$\tan^{-1} : R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

biçiminde bir ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyona arktanjant (kısaca arctan yazılır) fonksiyonu adı verilir. Arctan$x$ in anlamı Tanjantı x olan yayın uzunluğu demektir. Tanjant ve Arctanjant fonksiyonları birbirlerinin tersi olduklarından bunların grafikleri yandaki gibi olacaktır. Yukarıdaki tanıma göre

$$u = \text{Arctan } v \Leftrightarrow v = \tan u \text{ ve } u \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

demektir.



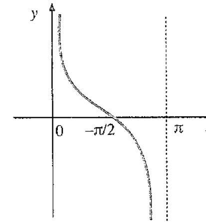
arctan : $R \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ fonksiyonunun grafiği

ÖRNEK : Arctan $(-\sqrt{3})$ ve arctan 1 ifadelerini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\arctan(-\sqrt{3}) = u \Leftrightarrow -\sqrt{3} = \tan u \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} \text{ olur.}$$

$$\arctan 1 = t \Leftrightarrow 1 = \tan t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \text{arc tan } 1 = \frac{\pi}{4} \text{ olur.}$$



cot : $(0, \pi) \to R$ fonksiyonunun grafiği

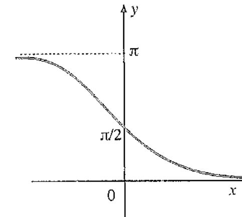
Kotanjant fonksiyonu da $(0, \pi)$ aralığında birebir örten olduğundan bu fonksiyonun da bir tersi vardır. Bu ters fonksiyona Arkkotanjant (Arccot) fonksiyonu denir. Demek ki

$$u = \text{Arccot } v \Leftrightarrow v = \cot u \text{ ve } u \in (0,\pi)$$

olur.

Kotanjant ve arckotanjant fonksiyonlarının grafikleri yanda verilmiştir.

ÖRNEK : $\text{Arccot}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ve arccot $\sqrt{3}$ ifadelerini hesaplayınız.



arccot : $R \to [0,\pi)$ fonksiyonunun grafiği

Çözüm :

$$u = \text{arccot}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow \cot u = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow u = \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \text{arccot}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$a = \text{arccot}\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot a = \sqrt{3} \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \text{arccot}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6} \text{ olur.}$$

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki dereceleri radyana çeviriniz.

(a) 15° (b) 150° (c) 240°
(d) 330° (e) 600° (f) 36°
(g) 725° (h) 235° (ı) −72°
(i) −80° (j) −220° (k) −300°

2. Aşağıdaki radyanları dereceye çeviriniz.

(a) $\frac{\pi}{15}$ (b) $\frac{\pi}{45}$ (c) $\frac{\pi}{12}$
(d) $11\frac{\pi}{6}$ (e) 4π (f) $5\frac{\pi}{2}$
(g) $-\frac{7\pi}{2}$ (h) $\frac{3\pi}{10}$ (ı) $\frac{7\pi}{12}$
(i) $9\frac{\pi}{4}$ (j) $-\frac{\pi}{12}$ (k) π^2

3. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = -\cos\theta$
(b) $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta$
(c) $\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin\theta$
(d) $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta$
(e) $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
(f) $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$
(g) $\sin(\pi + \theta) = -\cos\theta$
(h) $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

4. Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

(a) sgn(sin200π) (b) sgn(sec5)
(c) sgn(cos899) (d) sgn($\sin 2^4$)

5. Aşağıdaki ifadeleri, tablo veya hesap makinaları kullanmadan, hesaplayınız.

(a) tan135° (b) sec45° (c) csc60°
(ç) cot1210° (d) tan765° (e) sec150°
(f) csc135° (g) tan300° (h) cos(−120°)
(ı) $\tan\frac{5\pi}{6}$ (i) $\cot\left(-\frac{35\pi}{4}\right)$ (j) $\sin\frac{17\pi}{3}$
(k) $\tan\frac{19\pi}{6}$ (l) $\csc\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$ (m) $\csc\frac{99}{4}\pi$

6. Aşağıdaki fonksiyonların tek veya çift olup olmadığını araştırınız.

(a) $f(x) = \sin x + \cos x$
(b) $f(x) = x + \sin x$
(c) $\sin^2 x + \cos x$
(d) $k(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$

7. f fonksiyonunun bir periyodu p olsun.
Her x için
(a) $f(x - p) = f(x)$
(b) $f(x + np) = f(x)$, $(n \in N)$
olduğunu gösteriniz.

8. Aşağıdaki fonksiyonların esas periyotlarını bulunuz.

(a) $f(x) = \sin^4(2x)$
(b) $g(x) = \cos^3(5x + 1)$
(c) $(h(x) = |\cos x|$
(d) $k(x) = \sqrt{\sin x}$

9. $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cot\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ olduğunu gösteriniz.

10. [−1,1] aralığındaki görüntüsü $y = 1 - |x|$ in görüntüsü olan 2 periyotlu fonksiyonun grafiğini çiziniz

11. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$
(b) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$
(c) $\sin 4\theta = 8\sin\theta\cos^3\theta - 4\sin\theta\cos\theta$
(d) $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$

12. Bir ABC üçgeninde $m(\hat{C}) = \theta$ dır.

(a) $a = 3$, $b = 5$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ ise $c = ?$
(b) $a = 4$, $b = 6$, $\theta = \frac{\pi}{4}$ ise $c = ?$
(c) $a = 5$, $c = 7$, $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ise $b = ?$
(d) $b = 6$, $c = 9$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ ise $a = ?$
(e) $b = 10$, $c = 15$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ise $a = ?$
(f) $a = 5$, $b = 12$, $c = 13$ ise $\theta = ?$

13. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\tan\theta = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$
(b) $\tan\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta}$
(c) $\tan 2\theta = \frac{2}{\cot\theta - \tan\theta}$

14. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

(a) $\cos x = 1$ (b) $\sin x = -1$
(c) $\sin x = \frac{1}{2}$ (d) $\cos x = -1$
(e) $\tan x = 1$ (f) $\sec x = \sqrt{2}$
(g) $\cot x = 1$ (h) $\sin x = 1$

15. Her $n \in N$ için

(a) $\sin(x + n\pi) = (-1)^n \sin x$
(b) $\cos(x + n\pi) = (-1)^n \cos x$

olduğunu gösteriniz.

16. $\tan\theta > 0$ ve $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ olduğuna göre, cosθ , secθ, secθ, cscθ, cotθ ve tanθ oranlarını hesaplayınız.

17. $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ için $\tan\theta = -\frac{4}{5}$ olduğuna göre, sinθ, cosθ, secθ, csθ, cotθ oranlarını hesaplayınız.

18. Bir ABC üçgeninin alanının

$$Alan(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B$$
$$= \frac{1}{2}bc\sin A$$

bağıntıları yardımıyla hesaplanabileceğini gösteriniz.

19. Aşağıda bazı eleman ölçüleri verilen üçgenlerin alanlarını bulunuz.

(a) $m(\hat{A}) = 30°$, $b = 36$ br, $c = 24$ br
(b) $a = 10$ br, $b = 6$ br, $c = 14$ br

20. İki kenarının uzunluğu 6 ve 10 birim, büyük köşegenin uzunluğu 14 birim olan paralelkenarın açılarının ölçülerini bulunuz.

21. $y = \sin x$ eğrisinin grafiğinden yararlanarak

(a) $y = |\sin x|$ (b) $y = \sin|x|$

(c) $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ (d) $y = 2\sin x$

eğrilerinin grafiklerini çiziniz.

22. $f(x)$, tanım kümesi $[0,1]$ olan bir fonksiyon ise, $f(\sin x)$ ve $f(\tan x)$ fonksiyonlarının tanım kümeleri hangi kümelerdir?

23. Aşağıdaki denklemlerle tanımlanan fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

(a) $y = \arcsin \frac{x}{2}$ (b) $y = \arccos(2x)$

(c) $y = \arctan \frac{x-1}{x}$ (ç) $y = \operatorname{arccot} \sqrt{x-1}$

24. Aşağıdaki ifadelerin değerini bulunuz.

(a) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$ (b) $\arcsin \frac{1}{2}$

(c) $\arctan 0$ (d) $\operatorname{arccot} 1$

25. $\arcsin \frac{2}{\sqrt{29}} + \arcsin \frac{5}{\sqrt{29}}$

ifadesinin değerini bulunuz.

26. $\arcsin \frac{x-1}{x+1} = \arccos \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$

eşitliğinin doğruluğunu gösteriniz.

27. f(x), periyodu T olan bir periyodik fonksiyon olduğunda f(ax + b) fonksiyonununda periyodu $\frac{T}{|a|}$ olan bir periyodik fonksiyon olacağını gösteriniz.

28. Aşağıdaki fonksiyonların periyodik olup olmadıklarını araştırınız. Periyodik olanların periyodunu bulunuz.

(a) $f(x) = 2\cos\frac{x-\pi}{3}$

(b) $g(x) = \arctan(\sin x)$

(c) $h(x) = \cos\sqrt{x}$

(d) $k(x) = x + \sin x$

(e) $l(x) = \sin(x^2)$

(f) $m(x) = |\cos x|$

29. Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(b) $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(c) $\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

(ç) $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(d) $\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$

(e) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$

(f) $\arcsin x + \arcsin t = \arcsin\left(x\sqrt{1-t^2} + t\sqrt{1-x^2}\right)$

(g) $\text{acrcos}\, x + \arccos t = \arccos\left(xt - \sqrt{(1-x^2)(1-t^2)}\right)$

(h) $\arctan x + \arctan t = \arctan\left(\frac{x+t}{1-xt}\right)$

(ı) $\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

1.6 ÜSTEL VE LOGARİTMİK FONKSİYONLAR

Matematik, mühendislik ve fen bilimlerinde en çok kullanılan fonksiyon çeşitlerinden ikisi üstel ve logaritmik fonksiyonlardır. Bu kesimde bunların temel özelliklerini inceleyecek, daha ileriki bölümlerde türev ve integrallerini vereceğiz.

Şimdi, bizi üstel fonksiyon kavramına götüren bir örnek verelim.

ÖRNEK : Başlangıç anında 1 milyon üyeye sahip olan bir bakteri topluluğundaki üye sayısı, herbir saatte, bir saat önceki üye sayısının 3 katına çıkıyor. t saat sonra topluluğun kaç milyon üyesi olur? $t = \frac{5}{2}$ için üye sayısını hesaplayınız.

Çözüm :

Başlangıçta yani $t = 0$ için $f(0) = 1$ milyon

1 saat sonra üye sayısı $f(1) = 3 \cdot 1 = 3$ milyon

2 saat sonra üye sayısı $f(2) = 3 \cdot 3 = 3^2$ milyon

3 saat sonra üye sayısı $f(3) = 3 \cdot 3^2 = 3^3$ milyon

t saat sonra üye sayısı $f(t) = 3 \cdot 3^{t-1} = 3^t$ milyon

olur. O halde başlangıçtan t saat sonraki üye sayısı

$$f(t) = 3^t$$

olur. Başlangıçtan $\frac{5}{2}$ saat sonra

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = 3^{5/2} = (\sqrt{3})^5 = \sqrt{3^5} = \sqrt{243} \cong 15,588457 \text{ milyon},$$

yani 15 588 457 üyesi olur.

> **TANIM**
>
> a, 1 den farklı bir pozitif sayı olsun.
>
> $f(x) = a^x$
>
> biçiminde tanımlanan fonksiyona bir üstel fonksiyon denir.

Her x için $a^x > 0$ olacağından $f(x) = a^x$ fonksiyonunun görüntü kümesi, pozitif reel sayılar kümesi olan R^+ kümesidir. Dolayısıyla $y = a^x$ in grafiği daima Ox-ekseninin üst tarafındadır.

ÖRNEK : Aşağıda kuralları verilen fonksiyonlardan hangileri birer üstel fonksiyondur?

(a) $f(x) = 2^{-x}$ (b) $g(x) = 3^{2x}$

(c) $h(x) = 4^{x/5}$ (d) $s(x) = (-7)^x$

Çözüm :

(a) $f(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ yazılabildiğinden f bir üstel fonksiyondur.

(b) $g(x) = 3^{2x} = (3^2)^x = 9^x$ olduğundan, g bir üstel fonksiyondur.

(c) $h(x) = 4^{x/5} = (\sqrt[5]{4})^x$ olduğundan h da bir üstel fonksiyondur.

(d) $s(x) = (-7)^x$ bir üstel fonksiyon değildir, zira $a = -7$ olup pozitif değildir.

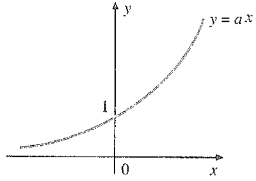
Üstel ifadelerden de bilindiği gibi,

$$a^0 = 1 \quad , \quad a^1 = a \quad , \quad a^{x+t} = a^x . a^t$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad (a^x)^t = a^{x.t}, \quad a^x . b^x = (ab)^x$$

$$a^x = a^t \Longleftrightarrow x = t$$

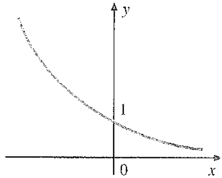
eşitlikleri vardır.



a > 1 için y = a^x in grafiği

$f(x) = a^x$ üstel fonksiyonu verildiğinde, $a > 1$ ise, $x_1 < x_2$ için $a^{x_1} < a^{x_2}$ olur. Şu halde f artandır. $a < 1$ ise $x_1 < x_2$ için $a^{x_1} > a^{x_2}$ olur, yani f azalandır.

$f(x) = a^x$ in grafiği a nın 1 den büyük ve 1 den küçük oluşuna göre yanda çizilmiştir.



0 < a < 1 için y = a^x in grafiği

TANIM

$y = a^x$ in grafiğinden de kolayca görülebileceği gibi $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan $f : R \to R^+$ fonksiyonu birebir örtendir. Dolayısıyla bu fonksiyonun $f^{-1} : R^+ \to R$ şeklinde bir ters fonksiyonu vardır. Bu ters fonksiyona logaritma fonksiyonu adı verilir ve fonksiyonun kuralı $y = \log_a x$ (a tabanına göre logaritma x biçiminde okunur) biçiminde yazılır. Demek ki $x > 0$ için

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

dir.

Yukarıdaki

$$y = \log_a x \iff x = a^y$$

bağıntısından yararlanarak bazı sayıların logaritması hesaplanabilir.

ÖRNEK : $\log_2 32$, $\log_8 4$, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$ sayılarını hesaplayınız.

Çözüm :

$\log_2 32 = u \iff 2^u = 32 \iff 2^u = 2^5 \iff u = 5$

olur. O halde $\log_2 32 = 5$ dir.

$\log_8 4 = v \iff 8^v = 4 \iff (2^3)^v = 2^2 \iff 2^{3v} = 2^2 \iff 3v = 2 \iff v = \frac{2}{3}$

olacağından $\log_8 4 = \frac{2}{3}$ dür.

$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = s \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^s = \frac{1}{9} \iff 3^{-s} = 3^{-2} \iff -s = -2 \iff s = 2$

Şu halde $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$ olur.

$\log_a x$ ifadesinde a sayısına logaritmanın tabanı, x sayısına da logaritması alınacak sayı adı verilir.

$\log_a x$ ifadesinin tanımlı olması için, $a > 0$, $a \neq 1$ ve $x > 0$ olmalıdır. 10 tabanına göre yazılan logaritmalara bayağı logaritma adı verilir. En çok kullanılan logaritma, doğal logaritma denilen e tabanına göre yazılan logaritmalardır. Burada e sayısı değeri 2,7182818... olan bir sayıdır. İlerideki bölümlerdeki bu sayı üzerinde detaylı olarak durulacaktır.

$\log_e x$ yerine çok kez $\ln x$ yazılır. O halde

$$y = \ln x \iff e^y = x$$

olur. Bu kitapta $\log_e x$ yerine $\ln x$, $\log_{10} x$ yerine $\log x$ yazılış biçimini kullanacağız.

$$\log_a a = u \iff a^u = a \iff u = 1$$

olduğundan

$$\log_a a = 1$$

bulunur.

$$\log_a 1 = v \iff a^v = 1 \iff v = 0$$

olacağından

$$\log_a 1 = 0$$

olur. $\log_a x = u$, $\log_a t = v$ olsun. Tanım gereğince

$$a^u = x,\ a^v = t \Rightarrow a^{u+v} = x.t \Rightarrow \log_a (x . t) = u + v$$

bulunur. Buna göre,

$$\log_a (x . t) = \log_a x + \log_a t$$

olur. Yukarıdaki düşünceyle

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

bağıntısının varlığı kolayca gösterilebilir.

Yine logaritma tanımından $\forall k \in R$ ve $\forall x \in R^+$ için

$$\log_a x^k = k \log_a x$$

dır. Gerçekten

$$u = \log_a x^k \ , \quad v = k \log_a x$$

denirse

$$a^u = x^k \ \text{ve}\ a^{\frac{v}{k}} = x$$

bulunur. İkinci eşitlikteki x değeri birinci denklemde yerine konursa

$$a^u = a^v \Rightarrow u = v \Rightarrow \log_a x^k = k \log_a x$$

bulunur.

ÖRNEK : $\log_2 8^{15}$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm :

$\log_2 8^{15} = 15.\log_2 8 = 15.\log_2 2^3 = 15.3.\log_2 2 = 15.3.1 = 45$ olur.

Şimdi de taban değiştirme kuralı denilen aşağıdaki eşitliği ispatlayalım.

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$\log_a b = u$, $\log_c a = v$ denirse $a^u = b$, $c^v = a$ bulunur.

İkinci eşitlikteki a değeri birinci eşitlikte yerine konursa

$$(c^v)^u = b \Rightarrow c^{uv} = b \Rightarrow \log_c b = u.v \Rightarrow$$

$$\log_c b = \log_a b \ .\ \log_c a$$

bulunur ki bu ispatı tamamlar. Bu eşitlikte $c = b$ konursa

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

bulunur. Yukarıdaki ispatlara benzer yollar izlenerek aşağıdaki bağıntıların doğruluğu gösterilebilir. Bu gösterimler birer alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır.

$$\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n} \log_a b \quad , \quad a^{\log_a x} = x$$

ÖRNEK : $\log_{\frac{1}{9}} 243$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm : $\log_{\frac{1}{9}} 243 = \log_{3^{-2}} 3^5 = \frac{5}{-2}.1 = -\frac{5}{2}$

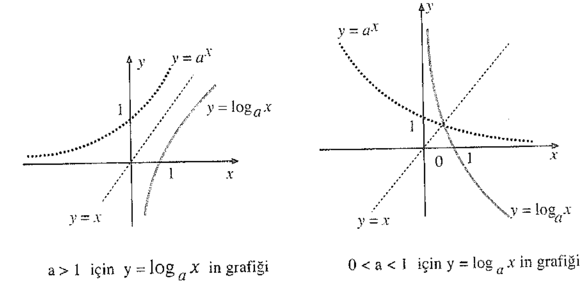
ÖRNEK : $3^{\log_3 7} + 3^{\log_3 2}$ işleminin sonucunu bulunuz.

Çözüm : $3^{\log_3 7} + 3^{\log_3 2} = 7 + 2 = 9$ olur.

f ile f^{-1} fonksiyonlarının grafikleri $y = x$ doğrusuna göre simetrik olduklarından $y = a^x$ ve $y = \log_a x$ eğrileri $y = x$ doğrusuna göre simetriktirler.

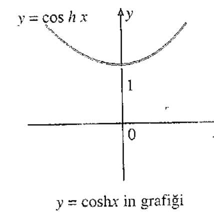
$a > 1$ ve $0 < a < 1$ için $y = \log_a x$ eğrilerinin grafikleri yanda verilmiştir.

f artan olduğunda f^{-1} artan, f azalan olduğunda f^{-1} azalan olacağından $a > 1$ için $y = \log_a x$ artan, $0 < a < 1$ için azalandır.

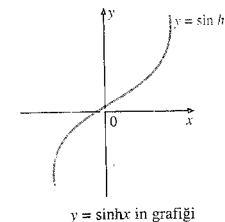


a > 1 için $y = \log_a x$ in grafiği   0 < a < 1 için $y = \log_a x$ in grafiği

1.7 HİPERBOLİK FONKSİYONLAR VE TERSLERİ



y = cosh$x$ in grafiği



y = sinh$x$ in grafiği

Simetrik bir küme üzerinde tanımlı her f fonksiyonu için

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

olduğundan, her fonksiyon biri çift biri de tek olan iki fonksiyonun toplamı şeklinde yazılabilir. $f(x) = e^x$ fonksiyonunun çift ve tek parçalarına sırası ile, hiperbolik kosinüs ve hiperbolik sinüs fonksiyonları adı verilir.

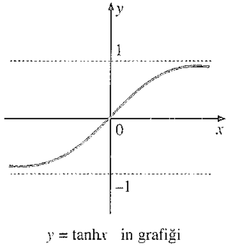
Buna göre,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

olur. Bu fonksiyonların grafikleri yanda çizilmiştir.

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1$$



$y = \tanh x$ in grafiği

olduğundan

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

dır. Diğer hiperbolik fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlardaki gibi tanımlanır. Tanjant hiperbolik x fonksiyonu

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

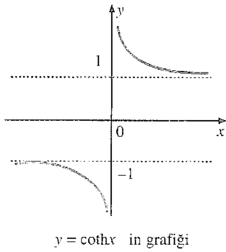
biçiminde tanımlanır.

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

olduğundan

$$-1 < \tanh x < 1$$

dir. $e^{2x} + 1 > 1$ olduğundan $\tanh x$ her yerde tanımlıdır. $t > 0$ için $f(t) = \frac{t-1}{t+1}$ fonksiyonu artan olduğundan $\tanh x$ artan fonksiyondur. Bu fonksiyonun grafiği yanda verilmiştir.

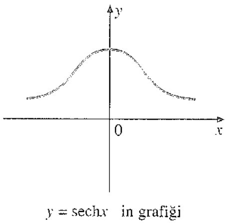


$y = \coth x$ in grafiği

Diğer hiperbolik fonksiyonlar ve bunların grafikleri aşağıda verilmiştir.

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$x = 0$ için $e^x - e^{-x} = 0$ olacağından bu fonksiyonun tanım kümesi $R \setminus \{0\}$ dır. Diğer iki hiperbolik fonksiyon



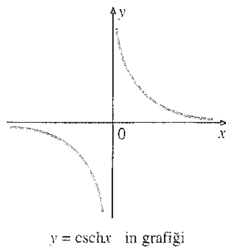
$y = \text{sech} x$ in grafiği

$$\sec hx = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

ve

$$\csc hx = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

biçiminde tanımlanır. $\text{sech}x$ her yerde, $\text{csch}x$ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ da tanımlıdır. Bu fonksiyonların grafikleri yanda verilmiştir.



$y = \text{csch} x$ in grafiği

Hiperbolik fonksiyonlar arasındaki temel bağıntılar aşağıda verilmiştir. Bunların doğruluğu tanımlardan hareketle kolayca elde edilebilir.

$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$
$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$$
$$\cosh^2 x = \frac{1}{2}(a \cos 2x + 1)$$
$$\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$$
$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$
$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\text{csch}^2 x = \coth^2 x - 1$$
$$\text{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$$

Diğer yandan

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x\,,$$

ve

$$\text{sech}(-x) = \frac{1}{\cosh(-x)} = \frac{1}{\cosh x} = \sec hx$$

olduğundan $\cosh x$ ve $\text{sech}x$ fonksiyonları çift fonksiyondur. Benzer şekilde

$$\sinh(-x) = -\sinh x \text{ ve } \text{csch}(-x) = -\text{csch}x$$

olacağından $\sinh x$ ve $\text{csch}x$ birer tek fonksiyondur.

Yukarıdaki altı hiperbolik fonksiyonun grafiklerinden de görüldüğü gibi

1) $\sinh x$ ve $\tanh x$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ üzerinde artan
2) $\coth x$ ve $\text{csch}x$ fonksiyonları $(-\infty, 0)$ ve $(0, +\infty)$ aralıkları üzerinde azalandır.
3) $\cosh x$ fonksiyonu $[0, +\infty)$ üzerinde artandır.
4) $\text{sech}x$ fonksiyonu $[0,+\infty)$ üzerinde azalandır.

Hiperbolik fonksiyonların artan veya azalan olduğu aralıklarda tersleri bulunabilir.

Buna göre

$\cosh$: $[0,\infty) \to [1, +\infty)$

$\sinh$: $(-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$

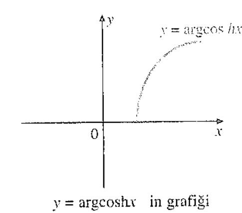
$\tanh$: $(-\infty,+\infty) \to (-1, 1)$

$\coth$: $(0,+\infty) \to (1,+\infty)$

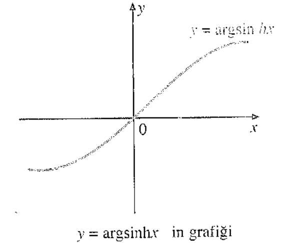
sech : $[0,+\infty) \to (0,1)$

csch : $(0,+\infty) \to (0,+\infty)$

fonksiyonları birebir örten olduğundan tersleri vardır. Bu ters fonksiyonlar argcosh$x$ (argüman kosinüs hiperbolik x biçiminde okunur.) argsinh$x$, argtanh$x$, argcot$x$, argsec$x$ ve argcsc$x$ fonksiyonlarıdır. Ters fonksiyonun grafiği esas fonksiyonun grafiğinin $y = x$ doğrusuna göre simetriği olacağından bunların grafikleri aşağıda verilmiştir.



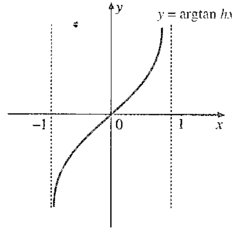
$y = \text{argcosh}x$ in grafiği



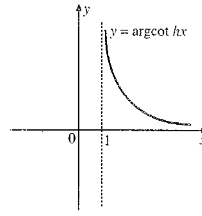
$y = \text{argsinh}x$ in grafiği

---

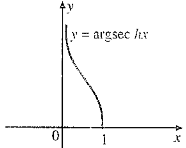
argsinh$x$ yerine $\sinh^{-1} x$ veya arcsinh$x$ gösterimleri de kullanılır.



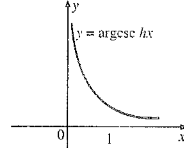
y = argtanh$x$ in grafiği



y = argcoth$x$ in grafiği



y = argsech$x$ in grafiği



y = argcsch$x$ in grafiği

Hiperbolik fonksiyonlar e^x ve e^{-x} cinsinden yazıldığından, ters hiperbolik fonksiyonlar logaritma fonksiyonu cinsinden yazılabilir. Gerçekten

$$\text{argcosh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad x \geq 1$$

$$\text{argsinh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \quad \text{her } x \text{ için}$$

$$\text{argtanh}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \quad |x| < 1 \text{ için}$$

$$\text{argcoth}x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \quad x > 1 \text{ için}$$

$$\text{argsech}x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1 \text{ için}$$

$$\text{argcsch}x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right), \quad x > 0 \text{ için}$$

yazılabilir. Bunlardan birincisini ispatlayıp diğerlerini birer alıştırma olarak okuyucuya bırakıyoruz.

$$y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow 2y = e^x + e^{-x}$$

$$\Rightarrow e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$\Rightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$$

bulunur. Şu halde $y = \cosh x$ in tersi

$$\text{argcoshx} = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

dir.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz.

(a) $\dfrac{(m^n . m^m)^m}{(m^m . m^n)^n}$

(b) $\left(\dfrac{3^{2x+y}}{3^{y+1}}\right)^{-y} . \left(\dfrac{3^{x-2y}}{9^{-y}}\right)^{2y}$

(c) $\dfrac{3^{x+2} - 3^x}{3^x + 3^{x+1}}$

(d) $\dfrac{a^{x+3} + a^{x+1} + a^{x-1}}{a^{x-5} + a^{x-3} + a^{x-1}}$

2. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

(a) $4^5 = 4^{2x+1}$

(b) $5^{x^2} = 5^{5-x}$

(c) $4^{x^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-3}$

(ç) $(0,0625)^{x+1} = \left(\frac{1}{8}\right)^{x-2}$

(d) $10^{x^2-1} - 2^{x^2-1} = 0$

(e) $5^{x-1} - 5^{x-2} = 20$

(f) $9^{x+2} + 9^x + 9^{x+1} = 91.3^8$

(g) $(x^2 + 3x + 3)^{2x+4} = 1$

3. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

(a) $2^x = 64$ (b) $10^{-x} = 0{,}001$

(c) $10^{-x} = 100$ (d) $(3^x)^2 = 81$

(e) $x^x = x^2$ (f) $\log_x 16 = 2$

(g) $\log_3 x = 4$ (h) $e^x = 7$

4. Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

(a) $e^{\ln 7}$ (b) $e^{-\ln 8}$

(c) $e^{\ln 2 + \ln 3}$ (d) $\log_2 16$

(e) $\log_3 27$ (f) $\log_{81} 3$

(g) $\log_2(\log_2(\log_2 16))$ (h) $\log_2(\log_4(\log_8 64))$

(ı) $\log_{0,5} 16$

5. Aşağıdaki ifadeleri ln2, ln3, ln5 cinsinden hesaplayınız.

(a) ln8 (b) ln72

(c) $\ln\frac{27}{40}$ (d) ln9

(e) ln6 (f) ln0,002

(g) $\ln\sqrt{0,005}$ (h) $\ln\frac{1}{90}$

(ı) $\ln(4{,}5 . 10^4)$

6. Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

(a) $3^{\log_3 7} + 2^{\log_2 5} = 5^{\log_5 x}$

(b) $8^{\log_8 3} - e^{\ln 5} = x^2 - 7^{\log_7 3x}$

7. Aşağıdaki denklemlerden y 'yi bulunuz.

(a) $\ln y = 2t + 4$

(b) $e^{\sqrt{y}} = x^2$

(c) $e^{x^2} . e^{2x+1} = e^y$

(d) $\ln(y - 1) = x + \ln x$

(e) $\ln(y^2 - 1) - \ln(y + 1) = \sin x$

(f) $e^{-0,3y} = 27$

8. $x^2 = 2^x$ denkleminin köklerini bulunuz.

9. Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların tanım kümelerini bulunuz.

(a) $f(x) = \ln(x^2 - 9)$

(b) $f(x) = \ln(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x})$

(c) $f(x) = \ln(\sin \pi x)$

(d) $f(x) = \arcsin(\ln x)$

(e) $f(x) = \sqrt{\ln(x-2)}$

(f) $f(x) = \ln(\ln(1 - x^2))$

(g) $f(x) = \arcsin(1-x) + \log_2(\log_2 x)$

(h) $f(x) = \arcsin\left(\log_{10}\dfrac{x}{10}\right)$

(ı) $f(x) = \log_2(\log_3(\log_4 x))$

(i) $f(x) = \log(1 - \log(x^2 - 5x + 16))$

10. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ fonksiyonunun tek fonksiyon olduğunu gösteriniz.

11. Aşağıdaki ifadeleri hesaplayınız.

(a) sinh0 (b) cosh0

(c) tanh0 (d) tanh1

(e) coth(−1) (f) sinh(ln2)

(g) cosh(ln3) (h) coth(ln4)

(ı) csch(lnπ) (i) sech(ln2)

12. Aşağıda birinin değeri verilen hiperbolik fonksiyonların değerlerini bulunuz.

(a) $\sinh x = -\dfrac{3}{4}$

(b) $\cosh x = \dfrac{12}{15}$

(c) $\tanh x = -\dfrac{7}{15}$

(d) $\operatorname{sech} x = \dfrac{3}{5}$

13. Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz.

(a) $\sinh(\ln x)$

(b) $\cosh(\ln x)$

(c) $\sinh(2\ln x)$

(ç) $\tanh(\ln x)$

(d) $\operatorname{argsinh}\left(\dfrac{1-x^2}{2x}\right)$

(e) $2\cosh(\ln x)$

14. Her x için

$e^x = \cosh x + \sinh x$

$e^{-x} = \cosh x - \sinh x$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak

$(\cosh x + \sinh x)^n = \cosh nx + \sinh nx$

$(\cosh x - \sinh x)^n = \cosh nx - \sinh nx$

bağıntılarının doğruluğunu gösteriniz.

15. Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\operatorname{argsech} x = \operatorname{arccosh}\dfrac{1}{x}$

(b) $\operatorname{argcsch} x = \arcsin\dfrac{1}{x}$

(c) $\operatorname{argcoth} x = \operatorname{arctanh}\dfrac{1}{x}$

1. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ için $(f \circ f)(x) = x$ olduğunu gösteriniz.

$f^{-1} = f$ midir?

2. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ dir. $x \neq 1$ için

$(f \circ f \circ f \circ f)(x) = x$

olduğunu gösteriniz.

3. $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$,

$g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ olsun.

(a) $x \geq 0$ için $g(\sqrt{x^2+1}) = f(x)$

(b) $x \geq 1$ için $g(\sqrt{x^2-1}) = g(x)$

olacağını gösteriniz.

4. $f(x) = \log\dfrac{1-x}{1+x}$ olsun. $a, b \in (-1,1)$ için

$$f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$$

olacağını gösteriniz.

5. $f(x) = \dfrac{a^x + a^{-x}}{2}$ için

$$f(a+b) + f(a-b) = 2f(a) \,.\, f(b)$$

olacağını gösteriniz.

6. f, [0,1] üzerinde tanımlı bir fonksiyon olduğuna göre, aşağıdaki biçimde tanımlanan g, h, k fonksiyonlarının tanım kümelerini bulunuz.

(a) $g(x) = f(3x^2)$

(b) $h(x) = f(x-5)$, $k(x) = f(\tan x)$

7. $a\cos x + b\sin x + c = 0$

denkleminin $x_1 - x_2 \neq 2k\pi$ bağıntısını sağlayan x_1, x_2 kökleri için

$$\sin(x_1 + x_2) = \frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$\cos(x_1 + x_2) = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\tan\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{b}{a}$$

olacağını gösteriniz.

8. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

biçiminde tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonunun tersinin $f^{-1}(x) = \sinh x$ olacağını gösteriniz.

9. $f : R \to R$ fonksiyonu her $x, y \in R$ için

$f(x+y) = f(x) \,.\, f(y)$

bağıntısını sağlıyor. $f(0)$ nedir?

10. Aşağıdaki fonksiyonların ve terslerinin grafiklerini çiziniz.

(a) $f : [0, +\infty) \to R$, $f(x) = x^2 + 1$

(b) $f : R \to R$, $f(x) = x^3 - 1$

(c) $f : [-\infty, 0] \to R$, $f(x) = x^2$

11. Monoton her fonksiyonun birebir olduğunu gösteriniz.

12. f artan olduğundan f^{-1} in de artan, f azalan olduğunda f^{-1} in de azalan olacağını gösteriniz.

13. $\log_2 3$ sayısının irrasyonel olduğunu gösteriniz.

14. $1 < a < b$ veya $0 < a < b < 1$ olsun.

$x > 1$ için $\log_a x > \log_b x$ olduğunu gösteriniz.

Bu eşitsizlik $0 < x < 1$ için de doğru mudur?

15. (a) $e^x = \cos hx + \sin hx$

(b) $e^{-x} = \cos hx - \sin hx$

(c) $(\cos hx + \sin hx)^n = \cosh nx + \operatorname{snh} nx$

olduğunu gösteriniz.

16. Aşağıdaki işlemlerin sonucunu bulunuz.

(a) $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$

(b) $2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}$

(c) $\arctan\frac{220}{119} - \arctan\frac{1}{239}$

(d) $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$

17. a, b, c $bc = 1 + a^2$ bağıntısını sağlayan sayılar olsun.

$$\arctan\frac{1}{a+b} + \arctan\frac{1}{a+c} = \arctan\frac{1}{a}$$

olduğunu gösteriniz. Burada a, $a + b$, $a + c$ sayılarının sıfırdan farklı sayılar ve sol taraftaki toplam $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığındaki bir sayıdır.

18. Aşağıdaki ifadeleri üstel biçimde yazarak sade hale getiriniz.

(a) $\cosh 5x + \sinh 5x$

(b) $(\sinh x + \cosh x)^4$

(c) $\ln(\cosh x + \sinh x) + \ln(\cosh x - \sinh x)$

19. Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

(b) $\operatorname{argtanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $|x| < 1$

(c) $\operatorname{argcoth} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, $x > 1$

(d) $\operatorname{argsech} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$, $0 < x \le 1$

(e) $\operatorname{argcsch} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$, $x > 0$

20. Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

(b) $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

(c) $\cosh^2 x = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos 2x + 1}{2}\right)$

(ç) $\sinh^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2x - 1)$

(d) $\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x$

(e) $\operatorname{csch}^2 x = \coth^2 x - 1$

(f) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

(g) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

21. $P(\cosh u, \sinh u)$ noktasının orijine olan uzaklığının $\sqrt{\cosh 2u}$ olacağını gösteriniz.

22. $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ için $\sinh x = \tan\theta$ olsun.

Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\cosh x = \sec\theta$

(b) $\tanh x = \sin\theta$

(c) $\coth x = \csc\theta$

(ç) $\operatorname{csch} x = \cot\theta$

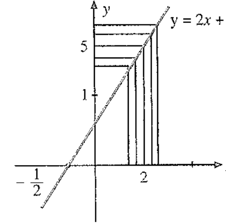
(d) $\operatorname{sech} x = \cos\theta$

2 LİMİT ve SÜREKLİLİK

2.1 LİMİT

Bundan önceki bölümde, bir kısım fiziksel ve kimyasal niceliklerin birbirine fonksiyonel bağıntılar yardımıyla bağlı olabileceklerini belirtmiştik. Eğer değişik nicelikler arasındaki fonksiyonel bağıntı belli ise, birbirine bağımlı büyüklüklerden birinin belli bir değere yaklaşması halinde diğerinin hangi değere yaklaşacağının bilinmesi çok önemlidir. Bu bizi limit kavramına götürür.

Şimdi $f(x) = 2x + 1$ biçiminde tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonunu gözönüne alalım. x değişkenine bazı değerler verip $f(x)$ ifadesinin alabileceği değerlere bakalım.



$x = 1{,}9$	ise	$f(x) = 4{,}80$	,	$x = 2{,}1$	ise	$f(x) = 5{,}20$
$x = 1{,}91$	ise	$f(x) = 4{,}82$	,	$x = 2{,}08$	ise	$f(x) = 5{,}16$
$x = 1{,}95$	ise	$f(x) = 4{,}90$	,	$x = 2{,}05$	ise	$f(x) = 5{,}10$
$x = 1{,}99$	ise	$f(x) = 4{,}98$	,	$x = 2{,}01$	ise	$f(x) = 5{,}02$
$x = 1{,}999$	ise	$f(x) = 4{,}998$	,	$x = 2{,}001$	ise	$f(x) = 5{,}002$

Görüldüğü gibi x değişkeni 2 ye yaklaştırıldığında $f(x)$ ifadesi de 5 sayısına yaklaşmaktadır. Yani x ler 2 nin bir komşuluğunda bulunurken $f(x)$ ler de 5 in bir komşuluğunda bulunmaktadır. 5 in bir komşuluğu $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$ olsun. Bu takdirde

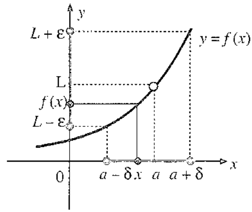
$$5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow |2x + 1 - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$2\,|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Buna göre x ler 2 nin $\frac{\varepsilon}{2}$ – komşuluğunda seçildiğinde $f(x)$ ler 5 nin ε–komşuluğunda kalır. $\frac{\varepsilon}{2} = \delta$ denirse

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$$

önermesi doğru olur.

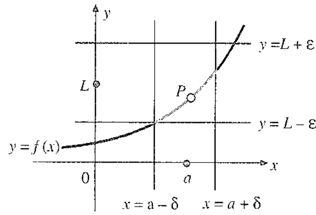


TANIM

$A \subset R, f : A \to R$ bir fonksiyon ve a da A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, eğer $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa x, a ya yaklaştığında f nin limiti L dir denir ve

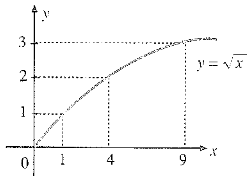
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

biçiminde gösterilir.



Bu tanıma göre, f nin a noktasındaki limiti L ise, $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki, $x \neq a$ için $y = f(x)$ eğrisinin $x = a - \delta$ ve $x = a + \delta$ düşey doğruları arasında kalan noktaları $y = L - \varepsilon$ ve $y = L + \varepsilon$ yatay doğruları arasında bulunur. Buna göre, ε sayısı verildiğinde $y = L + \varepsilon$ ve $y = L - \varepsilon$ doğrularının $y = f(x)$ eğrisini kestiği noktaların apsisleri $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ise δ nın alabileceği en büyük değer $|x_1 - a|$, $|x_2 - a|, \ldots, |x_p - a|$ sayılarının en küçüğüdür.

ÖRNEK :

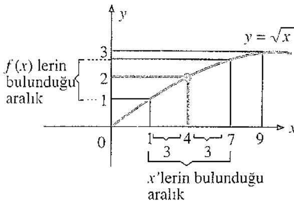


$f(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$, $L = 2$, $\varepsilon = 1$ olsun. $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunuz.

Çözüm :

$y = \sqrt{x}$ ile $y = 2 + \varepsilon = 2 + 1 = 3$ doğrusunun kesim noktasının apsisi

$$\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x_1 = 9$$



olur. $y = \sqrt{x}$ ile $y = L - \varepsilon = 2 - 1 = 1$ doğrusunun kesim noktasının apsisi

$$\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x_2 = 1$$

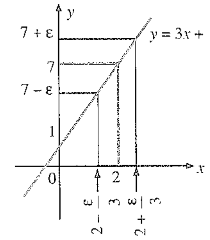
olur. δ nın alabileceği en büyük değer

$$\min\{|x_1 - a|, |x_2 - a|\} = \min\{5, 3\} = 3$$

olur. Buna göre

$$0 < |x - 4| < 3 \text{ için } |\sqrt{x} - 2| < 1$$

kalır.



ÖRNEK : $\lim_{x \to 2} (3x + 1) = 7$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $y = 7 + \varepsilon$ ve $y = 7 - \varepsilon$ doğrularının $y = 3x + 1$ doğrusunu kestiği noktaların apsisleri

$$3x + 1 = 7 + \varepsilon \Rightarrow 3x = 6 + \varepsilon \Rightarrow x_1 = 2 + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$3x + 1 = 7 - \varepsilon \Rightarrow 3x = 6 - \varepsilon \Rightarrow x_2 = 2 - \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. δ nın alabileceği en büyük değer

$$\min\{|x_1 - 2|, |x_2 - 2|\} = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon}{3}\right\} = \frac{\varepsilon}{3}$$

olur. Şu halde

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ için } |f(x) - 7| < \varepsilon$$

kalır. Buna göre

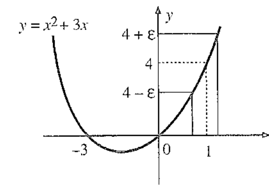
$$\lim_{x \to 2} f(x) = 7$$

dir.

İkinci Çözüm : $|3x + 1 - 7| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x - 6| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$

olur. Şu halde $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ veya $\frac{\varepsilon}{3}$ den küçük bir sayı olarak alınabilir.

ÖRNEK : $\lim_{x \to 1} x^2 + 3x = 4$ olduğunu gösteriniz.



Çözüm : $|x - 1| < \delta$ olduğunda

$|x^2 + 3x - 4| = |x + 4|\,|x - 1| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir δ bulalım.

$|x - 1| < 1$ varsayalım.

$-1 < x - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2 \Leftrightarrow 4 < x + 4 < 6 \Rightarrow |x + 4| < 6$

olur. Buna göre

$$|x^2 + 3x - 4| < 6.|x - 1| < \varepsilon \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{6}$$

olacağından $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{6}\right\}$ seçilebilir. Buna göre $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{6}$ ise

$$|x^2 + 3x - 4| = |x + 4|\,|x - 1| = 6.|x - 1| < 6.\frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon$$

olur. $\delta = 1$ ise $\varepsilon > 6$ olur. Bu durumda

$$|x^2 + 3x - 4| = |x + 4|\,|x - 1| < 6 \,.\, 1 < \varepsilon$$

bulunur. Şu halde $|x - 1| < \delta$ bağıntısını sağlayan her x için $|x^2 + 3x - 4| < \varepsilon$ kalır.

Limit tanımını kullanarak aşağıdaki özelliklerin sağlandığı kolayca gösterilebilir:

(1) $\lim\limits_{x \to a} c = c$

(2) $\lim\limits_{x \to a} x = a$

Şimdi limit almada kolaylık sağlayan bir teorem verelim.

TEOREM 2.1 :

$A \subset R$, $f : A \to R$ ve $g : A \to R$ birer fonksiyon ve $a \in R$ olsun.

Eğer $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ limitleri varsa

(1) Her $\alpha \in R$ için $\lim\limits_{x \to a} (\alpha . f)(x) = \alpha . \lim\limits_{x \to a} f(x)$

(2) $\lim\limits_{x \to a} (f + g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$

(3) $\lim\limits_{x \to a} (f . g)(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) . \lim\limits_{x \to a} g(x)$

(4) Her $x \in A$ için $g(x) \neq 0$ ve $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ ise

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

dır.

İspat : Yukarıdaki dört özelliğin ispatları birbirine benzer olduğundan (2) nin ispatını verip diğerlerini birer alıştırma olarak okuyucuya bırakıyoruz.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = L_2$ olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $\delta > 0$ bulunabilir ki, $0 < |x - a| < \delta$ bağıntısını sağlayan her $x \in A$ için

$$|f(x) - L_1| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ve} \quad |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

kalır. Aynı x ler için

$$|f(x) + g(x) - (L_1 + L_2)| = |f(x) - L_1 + g(x) - L_2|$$

$$\leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olacağından $f(x) + g(x)$ in a noktasındaki limiti $L_1 + L_2$ dir. Bu da ispatı tamamlar.

$\lim\limits_{x \to a} x = a$ olduğundan, özelliğin arka arkaya uygulanması ile

$$\lim_{x \to a} x^n = \lim_{x \to a} (x.x.\ldots.x) = \lim_{x \to a} x . \lim_{x \to a} x \ldots \lim_{x \to a} x = a.a.\ldots.a = a^n$$

bulunur. Bu özellik ve Teorem 2.1 deki (1) ve (2) özelliklerinden

$$\lim_{x \to a} (c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots c_1 x + c_0) = c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \ldots + c_1 a + c_0$$

bağıntısı elde edilir. Şu halde bir $P(x)$ polinomu için

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$$

olur.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x \to 2} (5x^3 - 8x^2 + x - 4)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : $\lim\limits_{x \to 2} (5x^3 - 8x^2 + x - 4) = 5 . 2^3 - 8 . 2^2 + 2 - 4 = 6$

olur.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 1}$ limitini hesaplayınız.

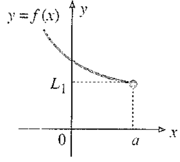
Çözüm : $x \neq 1$ olduğundan

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x - 1)(x + 3)}{(x - 1)(x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x(x + 3)}{(x + 1)} = \frac{\lim\limits_{x \to 1} x . \lim\limits_{x \to 1} (x + 3)}{\lim\limits_{x \to 1} (x + 1)}$$

$$= \frac{1 . (1 + 3)}{(1 + 1)} = \frac{4}{2} = 2$$

bulunur.



TANIM

f fonksiyonu bir (c,a) açık aralığında tanımlı olsun.

$\forall\varepsilon > 0$ için, eğer $a - \delta < x < a$ olduğunda $|f(x) - L_1| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa f nin a noktasındaki sol taraflı limiti L_1 dir denir,

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$$

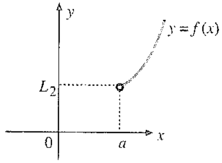
biçiminde gösterilir.

f fonksiyonu bir (a,d) açık aralığında tanımlı olsun.

$\forall\varepsilon > 0$ için, eğer $a < x < a + \delta$ olduğunda $|f(x) - L_2| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f nin a noktasındaki sağ taraflı limiti L_2 dir denir,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$$

şeklinde gösterilir.



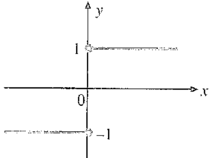
ÖRNEK : $R \setminus \{0\}$ üzerinde $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki sağ ve sol taraflı limitlerini bulunuz.

Çözüm : $x > 0$ için $|x| = x$, $x < 0$ için $|x| = -x$ olduğundan

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{-x} = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

bulunur. Verilen fonksiyonun grafiği yanda çizilmiştir.

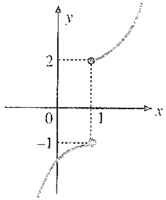


$f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ in grafiği

ÖRNEK : Grafiği yanda verilen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3, & x \geq 1 \quad ise \\ -x^2 + 2x - 2, & x < 1 \quad ise \end{cases}$$

fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki sağ ve sol taraflı limitlerini bulunuz.



Çözüm :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2 - 2x + 3) = 1 - 2 + 3 = 2$$

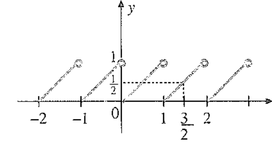
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-x^2 + 2x - 2) = -1 + 2 - 2 = -1$$

olur.

Sağ ve sol limitlerin tanımı gözönüne alındığında aşağıdaki sonuç ifade edilebilir.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L \quad ise \quad \lim_{x\to a} f(x) = L \text{ dir.}$$

ÖRNEK : $f(x) = x - [\![x]\!]$ fonksiyonunun $x = 2$ ve $x = \dfrac{3}{2}$ noktalarındaki limitleri-ni bulunuz.



Çözüm : 2 nin hemen sağında $[\![x]\!] = 2$ olacağından

$$\lim_{x\to 2^+} x - [\![x]\!] = \lim_{x\to 2^+} x - 2 = 2 - 2 = 0$$

olur. 2 nin solunda $[\![x]\!] = 1$ olacağından

$$\lim_{x\to 2^-} x - [\![x]\!] = \lim_{x\to 2^-} x - 1 = 2 - 1 = 1$$

olur. Sağ ve sol limitler farklı olduğundan $x = 2$ noktasında limit yoktur.

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}^+} x - [\![x]\!] = \lim_{x\to \frac{3}{2}^+} x - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}^-} x - [\![x]\!] = \lim_{x\to \frac{3}{2}^-} x - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

olduğundan

$$\lim_{x\to \frac{3}{2}} x - [\![x]\!] = \frac{1}{2}$$

dir.

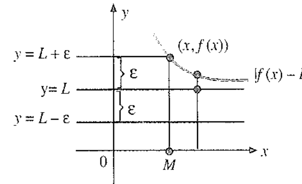
Eğer f fonksiyonu sadece $[a,b]$ aralığında tanımlı ise x'in b'ye yaklaşması sadece soldan mümkün olacağından

$$\lim_{x\to b^-} f(x) \text{ varsa } \lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b^-} f(x) \text{ dir.}$$

dir. Benzer olarak

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \text{ varsa } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

dir.



Eğer x sınırsız olarak büyüdüğünde $f(x)$ ler bir L sayısına yaklaşırsa f nin $x\to\infty$ için limiti L dir, denir. Buna göre şu tanımı verebiliriz.

TANIM

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ için $\exists M$, öyleki her $x > M$ için $|f(x) - L| < \varepsilon$.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+4}{x} = 1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $\varepsilon > 0$ olsun. $x \neq 0$ için

$$\left|\frac{x+4}{x} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{4}{|x|} < \varepsilon \Rightarrow |x| > \frac{4}{\varepsilon} \Rightarrow x > \frac{4}{\varepsilon} \text{ veya } x < -\frac{4}{\varepsilon}$$

$M = \dfrac{4}{\varepsilon}$ alınırsa $x > \dfrac{4}{\varepsilon}$ için $\left|\dfrac{x+4}{x} - 1\right| < \varepsilon$ kalır. Şu halde

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+4}{x} = 1$$

dir.

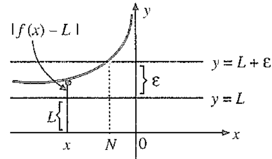
ÖRNEK : Hangi x ler için $\left|\dfrac{2x^2}{x^2+1} - 2\right| < \dfrac{1}{85}$ olur?

Çözüm :

$$\left|\frac{2x^2}{x^2+1} - 2\right| < \frac{1}{85} \Longleftrightarrow \frac{2}{x^2+1} < \frac{1}{85} \Longleftrightarrow x^2+1 > 170 \Longleftrightarrow$$

$x^2 > 169 \Leftrightarrow x < -13$ veya $x > 13$ olmalı.

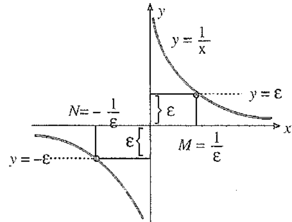
$x \to -\infty$ için limit benzer şekilde tanımlanır.



> **TANIM**
>
> $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ için $\exists N$, öyleki
>
> $\forall x < N$ için $|f(x) - L| < f$.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \dfrac{1}{|x|} < \varepsilon \Longleftrightarrow |x| > \dfrac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow x > \dfrac{1}{\varepsilon}$ veya $x < -\dfrac{1}{\varepsilon}$



Buna göre $N = -\dfrac{1}{\varepsilon}$ dur. Yani $x < -\dfrac{1}{\varepsilon}$ için $|f(x) - 0| = \left|\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon$ kalır.

O halde

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad ve \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

dır.

Limit alma kurallarını veren teorem $x \to -\infty$ ve $x \to \infty$ için alınan limitler için de geçerlidir.

ÖRNEK : a reel sayısı için $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a}{x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a}{x} = a \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = a.0 = 0$

olur. Benzer şekilde

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{a}{x} = 0$$

olduğu gösterilebilir.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{[\![x]\!]}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : Her x reel sayısı için

$x = [\![x]\!] + k, \quad 0 \le k < 1$

yazılabildiğinden

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{[\![x]\!]} = \lim_{x\to\infty} \frac{[\![x]\!]+k}{[\![x]\!]} = \lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{k}{[\![x]\!]}\right) = 1 + 0 = 1$$

olur.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 4x + 5}{2x^2 + x - 1}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-4x+5}{2x^2+x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(3 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2})}{x^2(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{3-0+0}{2+0-0} = \frac{3}{2}$$

olur.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x+5}{4x^2+8x+1}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+5}{4x^2+8x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(2+\frac{5}{x})}{x^2(4+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{2+\frac{5}{x}}{4+\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}} = 0 \cdot \frac{2+0}{4+0+0} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

bulunur.

ÖRNEK : $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{2x^2+3}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{2x^2+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3(1+\frac{1}{x^3})}{x^2(2+\frac{3}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} x \,.\, \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^3}}{2+\frac{3}{x^2}}$$

$$= +\infty \,.\, \frac{1+0}{2+0} = \infty \,.\, \frac{1}{2} = +\infty$$

olur.

Yukarıdaki örneklerden de görüldüğü gibi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... b_1 x + b_0} = \begin{cases} 0, & n < m \quad ise \\ \frac{a_n}{b_n}, & m = n \quad ise \\ \left(sgn \frac{a_n}{b_m}\right).\infty, & n > m \quad ise \end{cases}$$

olur.

ÖRNEK : $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$ *ve* $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+x} - x)$ limitlerini hesaplayınız.

Çözüm : Pay ve payda $\sqrt{x^2+x} + x$ ile çarpılırsa

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

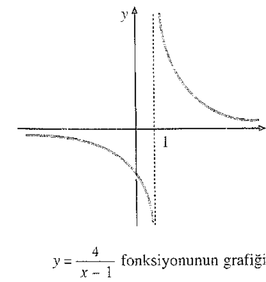
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) = \lim_{x\to-\infty} |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}} - x = \infty + \infty = \infty$$

olur.

Bir f fonksiyonu verilmiş olsun. x yerine a sayısına yakın değerler verildiğinde $f(x)$ sınırsız olarak artıyorsa x değişkeni a sayısına yaklaştığında $f(x)$ in limiti $+\infty$ dur denir. Bunu aşağıdaki şekilde daha kısa olarak ifade edebiliriz.



$y = \frac{4}{x-1}$ fonksiyonunun grafiği

> **TANIM**
>
> $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$ Her $B > 0$ için $\exists\delta > 0$, öyle ki $0 < |x-a| < \delta$ bağıntısını sağlayan tüm x ler için $f(x) > B$ dir.

Limitin $-\infty$ olması da benzer şekilde tanımlanır.

> **TANIM**
>
> $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$ Her K için $\exists\delta > 0$, öyle ki $0 < |x-a| < \delta$ bağıntısını sağlayan tüm x ler için $f(x) < K$ dir.

Sağ ve sol taraflı limitler de benzer şekilde tanımlanır. Yukarıdaki tanımlarda $0 < |x-a| < \delta$ yerine $a - \delta < x < a$ alınırsa sol taraflı, $a < x < a + \delta$ alınırsa sağ taraflı limitin $+\infty$ olması tanımı elde edilir.

ÖRNEK : $\lim_{x\to 1^+} \frac{4}{x-1}$ *ve* $\lim_{x\to 1^-} \frac{4}{x-1}$ limitlerini hesaplayınız.

Çözüm : $x > 1$ ve B istenildiği kadar büyük bir sayı olsun.

$\frac{4}{x-1} > B \Rightarrow x - 1 < \frac{4}{B}$ olduğundan $\delta = \frac{4}{B}$ seçilebilir. Şu halde

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{4}{x-1} = +\infty$$

bulunur.

$x < 1$ ve K istenildiği kadar küçük bir sayı olsun.

$$\frac{4}{x-1} < K \Leftrightarrow \frac{4}{1-x} > -K \Leftrightarrow 1 - x < \frac{4}{-K}$$

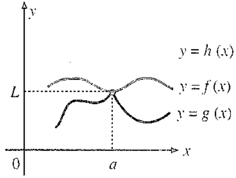
olur. Şu halde $\delta = \frac{4}{-K} = \frac{4}{|K|}$ alınabilir. Buna göre,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{4}{x-1} = -\infty$$

dur.

$f(x) = \frac{1}{x-1}$ fonksiyonunun grafiği yanda çizilmiştir. İnceleyerek bu limitleri görünüz.

Şimdi, bilinen limitler yardımıyla, bazı fonksiyonların limitlerini hesaplamamıza yardımcı olan bir teoremi verelim.



TEOREM 2.2 (Sandviç Teoremi) :

a nın bir delinmiş komşuluğundaki her x için

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

ve

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

ise

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

dir.

İspat : $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$, öyleki $|x - a| < \delta$ için

$$|g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{4} \quad ve \quad |h(x) - L| < \frac{\varepsilon}{4}$$

kalır. Aynı x ler için

$$|f(x) - g(x)| \leq |h(x) - g(x)|$$

$$= |h(x) - L + L - g(x)| \leq |h(x) - L| + |g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

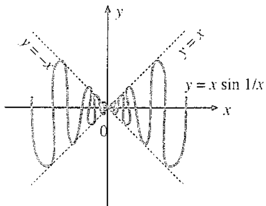
olur. Buna göre,

$$|f(x) - L| = |f(x) - g(x) + g(x) - L| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

olur ki bu ispatı tamamlar.

Yukarıdaki teoremin tek taraflı limitler için de geçerli olduğu açıktır.

ÖRNEK : $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x}$ limitini hesaplayınız.



Çözüm : $\left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |x|$ olduğundan $-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$ olur.

$g(x) = -x$, $h(x) = x$ alınırsa

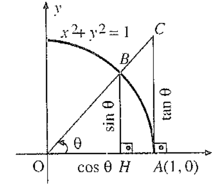
$$\lim_{x \to 0} (-x) = \lim_{x \to 0} x = 0$$

olur. Yukarıdaki teoreme göre

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

bulunur.

2.3 BAZI TRİGONOMETRİK LİMİTLER



$x^2 + y^2 = 1$ birim çemberini ve ölçüsü θ olan BOA açısını çizelim.

Burada $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ dır.

$$\text{Alan}(\overset{\Delta}{BOH}) < \text{Alan}(BOA \text{ dilimi}) < \text{Alan}((\overset{\Delta}{COA})$$

olduğundan

$$\frac{1}{2}\cos\theta \, . \sin\theta < \frac{1}{2}\,\theta < \frac{1}{2} \, . \, 1 \, . \tan\theta$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik, 2 ile çarpılıp $\sin\theta$ ile bölünürse

$$\cos\theta < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

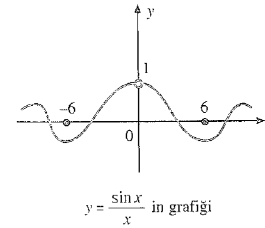
bulunur.

$$\lim_{\theta \to 0} \cos\theta = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos\theta} = 1$$

olduğundan

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\theta}{\sin\theta} = 1$$

olur.



$y = \frac{\sin x}{x}$ in grafiği

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\frac{\theta}{\sin\theta}} = \frac{1}{1} = 1$$

olacağından

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

bulunur.

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \, . \, \frac{1}{\cos\theta}\right) = 1 \, . \, 1 = 1$$

olacağından

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\tan\theta}{\theta} = 1$$

olur.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx} = \dfrac{a}{b}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin ax}{ax} . ax}{\dfrac{\sin bx}{bx} . bx} = \frac{a}{b} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin ax}{ax}}{\dfrac{\sin bx}{bx}} = \frac{a}{b} . \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$$

olur. $x \to 0$ için $ax \to 0$ ve $bx \to 0$ olduğuna dikkat ediniz.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x\to \infty} x \sin \dfrac{3}{x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : $\dfrac{3}{x} = \theta$ denirse $x \to \infty$ için $\theta \to 0$ olur. Buna göre

$$\lim_{x\to\infty} x \sin\frac{3}{x} = \lim_{\theta\to 0} \frac{3}{\theta} \sin\theta = 3 \lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 3.1 = 3$$

olur.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{x^2}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1 - 2\sin^2 x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} 2 . \frac{\sin x}{x} . \frac{\sin x}{x} = 2.1.1 = 2$$

bulunur.

Aşağıda bazı limit alma kuralları verilmiştir. Bunların ispatını ileride vereceğiz.

(1) $a > 1$ için $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = 0$

(2) $0 < a < 1$ için $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} a^x = +\infty$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ varsa $n \in N$ için $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$ dir.

(4) n bir tek doğal sayı veya bir çift doğal sayı olduğunda a nın bir komşuluğunda $f(x) \geq 0$ ise,

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

dir.

(5) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ ve a nın bir komşuluğunda $g(x)$ sınırlı ise

$$\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = 0$$

dır.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} v(x) = +\infty$ ve $\lim\limits_{x\to\infty} u(x)\, v(x) = \lambda$ ise

$$\lim_{x\to\infty} [1 + u(x)]^{v(x)} = e^{\lambda}$$

dır.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x\to\infty} \left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x} + \dfrac{3}{x}\right]$ limitini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\lim_{x\to\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + \frac{3}{x}\right] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + \lim_{x\to\infty} \frac{3}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} 2^x + 3. \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = +\infty + 0 = +\infty$$

ÖRNEK : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^3 x}{x^3}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 = \left[\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right]^3 = 1^3 = 1$$

ÖRNEK : $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ limitini hesaplayınız.

Çözüm :

$\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} v(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x = +\infty$ ve

$\lim\limits_{x\to\infty} u(x)\; v(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} x = \lim\limits_{x\to\infty} 1 = 1$

olduğundan

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

dir.

ÖRNEK : $\lim_{x \to 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : $\frac{1}{x} = t$ denirse $x \to 0$ için $t \to \infty$ olur. Buna göre,

$$\lim_{x \to 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{3}{t}\right)^{t}$$

olur.

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{3}{t} = 0, \quad \lim_{t \to \infty} v(t) = \lim_{t \to \infty} t = +\infty \quad \text{ve}$$

$$\lim_{t \to \infty} u(t)\, v(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{3}{t}\, t = 3$$

olacağından

$$\lim_{x \to 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to \infty} (1 + \frac{3}{t})^{t} = e^{3}$$

bulunur.

ÖRNEK : $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 4}\right)^{2x+3}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : $\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 4} = 1 + \frac{2x - 1}{x^2 + 4}$

olduğundan

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 4}\right)^{2x+3} = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2x - 1}{x^2 + 4}\right)^{2x+3}$$

olur.

$$\lim_{x \to \infty} u(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x - 1}{x^2 + 4} = 0\,,$$

$$\lim_{x \to \infty} v(x) = \lim_{x \to \infty} (2x + 3) = \infty\,,$$

$$\lim_{x \to \infty} u(x) v(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{2x - 1}{x^2 + 4} (2x + 3) = 4$$

olacağından

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 4}\right)^{2x+3} = e^{4}$$

dür.

Limit konusunda belirsiz şekiller denilen kesimi 4. Bölümde detaylı olarak inceleyeceğiz.

PROBLEMLER

1. $\varepsilon - \delta$ yöntemiyle aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

   (a) $\lim_{x \to 1} (2x + 3) = 5$ (b) $\lim_{x \to 1} (x^2 + 3x) = 4$

   (c) $\lim_{x \to 16} \sqrt{x - 7} = 3$ (d) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3 + x}{x} = 1$

2. Aşağıda verilen $f(x)$, L, ε ve a için öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulunuz ki $0 < |x - a| < \delta$ için $|f(x) - L| < \varepsilon$ kalsın.

   (a) $f(x) = 5x$, $L = 10$, $a = 12$, $\varepsilon = 0{,}01$

   (b) $f(x) = x^2$, $L = 4$, $a = 2$, $\varepsilon = 1$

   (c) $f(x) = x^3$, $L = -1$, $a = -1$, $\varepsilon = 0{,}1$

   (d) $f(x) = \frac{3x^2 + 8x - 3}{x + 3}$, $L = -10$, $a = -3$, $\varepsilon = 0{,}15$

   (e) $f(x) = x^2 \sin x$, $L = 0$, $a = 0$, $\varepsilon = 0{,}5$

   (f) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$, $L = 3$, $a = 1$, $\varepsilon = 0{,}05$

3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

   (a) $\lim_{x \to 1^+} \frac{[\![x]\!]}{x}$ (b) $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{\sqrt{x}}$

   (c) $\lim_{x \to 0^-} \frac{[\![x]\!]}{x}$ (ç) $\lim_{x \to 2^-} (x - \sqrt{4 - 2x}\,)$

   (d) $\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ (e) $\lim_{x \to 0} \sqrt{x \cos x}$

   (f) $\lim_{x \to 0^-} \sqrt{-x^2 \sin 3x}$ (g) $\lim_{x \to 0^+} \frac{5 + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{x}}$

   (ğ) $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{x}$ (h) $\lim_{x \to 3^-} \left(\frac{1}{x - 3} - \frac{6}{x^2 - 9}\right)$

   (ı) $\lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$ (i) $\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{1 + |x|}$

   (j) $\lim_{x \to 0^+} \frac{[\![\sin x]\!]}{\sin x}$ (k) $\lim_{x \to 3^+} \frac{[\![x^2]\!] - 9}{x - 3}$

4. n bir tamsayı olmak üzere, aşağıda verilen f fonksiyonları için

   $$\lim_{x \to n^+} f(x) \quad ve \quad \lim_{x \to n^-} f(x)$$

   limitlerini hesaplayınız.

   (a) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in Z \\ x, & x \notin Z \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} 2 + (-1)^{x}, & x \in Z \\ 2, & x \notin Z \end{cases}$

   (c) $f(x) = (-1)^{\text{û}\, x\, \text{ô}}$

   (ç) $f(x) = 1 + [\![x]\!] - x$

   (d) $f(x) = \left[\!\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\!\right]$

   (e) $f(x) = x - [\![x]\!]$

5. Herbir $n \in N$ için

   $$\lim_{x \to n^-} [\![x]\!] = n - 1\,, \quad \lim_{x \to n^+} [\![x]\!] = n$$

   olacağını gösteriniz.

6. $\lim_{x \to 2^+} [\![x^5]\!]$ *ve* $\lim_{x \to 2^-} [\![x^5]\!]$

   limitlerini hesaplayınız.

7. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$ *ve* $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$

   limitlerini hesaplayınız. $x = 0$ noktasında limit var mıdır?

8. m nin hangi değerleri için

   $$\lim_{x \to m} \frac{|x|}{x}$$

   limiti vardır?

9. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin\sqrt{2x}}{\sqrt{\sin 2x}}$

(b) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}^+} [\![\arccos x]\!]$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{[\![-x]\!]}{[\![x]\!]}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{3x}{[\![x]\!]}$

10. $f: [-3,3) \to R,\ f(x) = \sqrt{x - [\![x]\!]}$

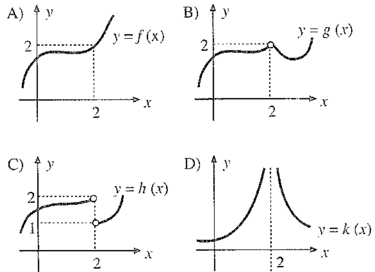
fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Limitli olmadığı noktaların kümesini bulunuz.

11. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-\sqrt{m}}{x-3}$ limitinin varolduğu biliniyor. Bu limiti hesaplayınız.

12. $f(x) = \begin{cases} mx+n, & x>-1 \ \ ise \\ 3, & x=-1 \ \ ise \\ mx+2, & x>-1 \ \ ise \end{cases}$

fonksiyonunun $x = -1$ de limitli olması için m ve n ne olmalıdır?

13. Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların $x = 2$ noktasındaki sağ ve sol limitlerini bulunuz. Hangilerinin $x = 2$ de limiti vardır?



14. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x<0 \ \ ise \\ \dfrac{1-\cos x}{x}, & x>0 \ \ ise \end{cases}$

fonksiyonunun sağ ve sol taraflı limitlerini bulunuz. $x = 0$ da limit var mı?

15. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} (3x^2 - 2x + 1)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} (x^2-2)^5$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2+2)^3}{3x-1}$ (ç) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^2-x-2}$

(d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$ (e) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{3}}{x-3}$

(f) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{25-x^2}}$ (g) $\lim\limits_{y\to 8} \dfrac{y^{2/3}}{y-\sqrt{2y}}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ (ı) $\lim\limits_{x\to 3} |x-4|$

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^2-1}{x}$ (j) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-1}{x+2}$

(k) $\lim\limits_{t\to 9} \dfrac{3-\sqrt{t}}{9-t}$ (l) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x-1}{x+2}$

(m) $\lim\limits_{x\to 3} x - [\![x]\!]$ (n) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} x - [\![x]\!]$

(o) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-2|}{sgn(x-1)^2}$ (ö) $\lim\limits_{x\to 0} 5^{\frac{1}{x}}$

(p) $\lim\limits_{x\to 2} [\![x]\!] + [\![-x]\!]$ (r) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} [\![x]\!] + [\![-x]\!]$

(s) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} [\![\sin x]\!]$ (ş) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x\sin x}{x+\sin x}$

(t) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{5}\,x-5\sqrt{x}}{x-5}$ (u) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{x+1}$

(ü) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+1}}{x}$ (v) $\lim\limits_{x\to 0} [\![\cos x]\!]$

(y) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+5}$

(z) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x^2+8x-3} - x + 2$

16. Sandviç Teoreminden yararlanarak aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\dfrac{1}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \cos\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[3]{x}\,\sin\dfrac{1}{x}$

17. $f: R \to R,$

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+1}{x}, & x>1 \ \ ise \\ \dfrac{2ax+bx}{x+1}, & x\le 1 \ \ ise \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 1$ de limitinin olması için a ve b ne olmalıdır?

18. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sin x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{\sin x - x}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x^2)}{x^2}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin\sqrt{x}}{x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{3}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\sin 3x)^2}{x^2\cos x}$

(ı) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ (i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\tan 5x}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0} x\sec x \,.\, \csc x$ (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{\sin x}$

(l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\sin^2\dfrac{x}{2}$ (m) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin(x^2-4)}{x-2}$

(n) $\lim\limits_{x\to \infty} x \,.\, \sin\dfrac{1}{x}$ (o) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(1-\cos x)}{x}$

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{x^3}$ (r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

(s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{\sin 3x}$ (ş) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x+\frac{\pi}{2})}{x}$

(t) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x}{\cot\frac{1}{x}}$ (u) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^{2000}+x^{1999}}{\sin(x+1)}$

19. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ise $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |L|$ dir, gösteriniz.

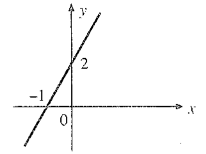
20. $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$ ise $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ dır, gösteriniz.

21. $f(x) = x + 1,\ g(x) = 2x + 4$ olduğuna göre,

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(fog)(x)}{(gof)(x)}$

limitini hesaplayınız.

22.

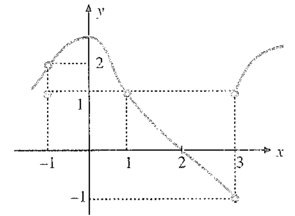


f fonksiyonunun grafiği yukarıda verilmiştir.

$\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{f^{-1}(x)}{f(x)}$

limitini hesaplayınız.

23.



Grafiği yukarıda verilen f fonksiyonu için,

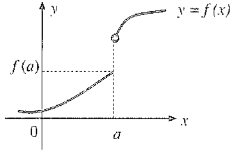
$\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

limitlerini hesaplayınız.

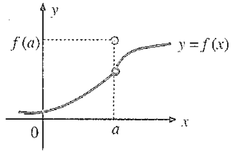
2.4 SÜREKLİLİK

Bir fonksiyonda, değişkenin bir nokta komşuluğunda değişik değerler alması durumunda fonksiyon değerlerinin, fonksiyonun o noktada aldığı değer komşuluğunda bulunup bulunmaması çok önemlidir. Bu düşünce bizi süreklilik kavramına götürür.



f fonksiyonu bir a noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Bu takdirde şu üç durumdan biri gerçekleşir.

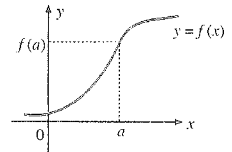
(1) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ yoktur.



(2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vardır, fakat $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$ dır.

(3) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vardır ve $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ dır.

Bu üç durumu açıklayan grafikler yanda verilmiştir.



TANIM

$A \subset R$, $f : A \to R$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ise f fonksiyonu a noktasında **süreklidir** denir. Eğer f fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise fonksiyon A üzerinde süreklidir denir.

Yukarıdaki tanıma göre, bir f fonksiyonunun bir a noktasında sürekli olması için,

(a) f fonksiyonu a noktasında tanımlı olmalıdır.

(b) f fonksiyonunun a noktasında limiti olmalıdır.

(c) fonksiyonunun a noktasındaki limiti a noktasındaki fonksiyon değerine eşit olmalıdır.

Limit tanımı hatırlanacak olursa, süreklilik kavramı şu şekilde tanımlanabilir.

TANIM

$A \subset R$, $f : A \to R$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

f fonksiyonu a noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır öyleki $|x - a| < \delta$ bağıntısını sağlayan her $x \in A$ için $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ dır.

Şimdi süreklilik ile ilgili bazı örnekler verelim.

ÖRNEK : $f : R \to R$, $f(x) = c$ şeklinde tanımlanan sabit fonksiyon R de süreklidir. Bunu göstermek için verilen fonksiyonun R de keyfi olarak seçilen herhangi bir noktada sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. Buna göre verilen fonksiyonun bir a noktasında sürekli olduğunu gösterelim.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} c = c = f(a)$$

olduğundan verilen fonksiyon her a noktasında ve dolayısıyla R de süreklidir.

ÖRNEK : $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonu her noktada süreklidir. Gerçekten

$$\left|\sin \frac{x-a}{2}\right| \leq \left|\frac{x-a}{2}\right| \quad \text{ve} \quad \left|\cos \frac{x+a}{2}\right| \leq 1$$

olduğundan

$$|\sin x - \sin a| = 2\left|\sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}\right| \leq 2 . \frac{|x-a|}{2} . 1 = |x - a|$$

eşitsizliği bulunur. O halde $|x - a| < \delta$ olduğunda $|\sin x - \sin a| < \delta$ olur. Yani $\delta = \varepsilon$ alınabilir. Demek ki sinüs fonksiyonu her a noktasında sürekli ve dolayısıyla R de süreklidir.

ÖRNEK : R de $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x < 0 \ \ ise \\ 0, & x = 0 \ \ ise \\ x+1, & x > 0 \ \ ise \end{cases}$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

Önce bu fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki limitini bulalım.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + 1 = 1$$

ve

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (-x^2) = 0$$

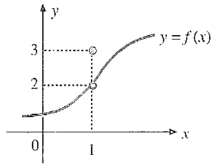
olacağından $x = 0$ noktasında limit yoktur. Dolayısıyla fonksiyon bu noktada sürekli değildir.

ÖRNEK : $f(x) = [\![x]\!] + 2x$ şeklinde tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonu sürekli midir?

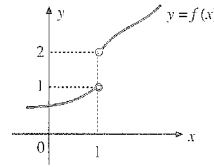
Çözüm : Tamsayılarda $[\![x]\!]$ in limiti olmadığından, f fonksiyonu tamsayılarda sürekli değildir.

TANIM

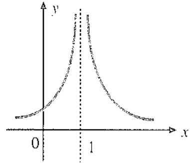
Bir $f : A \to R$ fonksiyonu $a \in A$ noktasında sürekli değilse, fonksiyon bu noktada süreksizdir denir.



x = 1 de kaldırılabilir süreksizlik



x = 1 de sıçrama süreksizliği



x = 1 de sonsuz süreksizliği

Bir fonksiyon bir a noktasında süreksiz ise şu durumlardan biri mevcuttur :

(1) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ vardır, fakat bu limit, fonksiyonun a noktasındaki değeri olan $f(a)$ dan farklıdır, ya da fonksiyon a da tanımlı olmayabilir. Bu durumdaki fonksiyonunun süreksizliğine kaldırılabilir süreksizlik adı verilir. Bu fonksiyonun a noktasındaki değeri limit değerine eşit olarak tanımlanırsa (yeni) fonksiyon sürekli olur.

(2) a noktasındaki sağ ve sol limitler mevcut fakat farklı olabilir. Bu durumdaki süreksizliğe sıçrama süreksizliği adı verilir.

$$J = \left| \lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x) \right|$$

sayısına f nin a noktasındaki sıçraması denir.

(3) Sağ ve sol limitlerden en az biri $+\infty$ veya $-\infty$ ise,veya mevcut değilse, bu fonksiyon a noktasında bir sonsuz süreksizliğine sahiptir denir.

Bu üç tip süreksizliğe sahip olan fonksiyonlardan birer tanesi yandaki şekillerde gösterilmiştir.

TANIM

$A \subset R$, $f : A \to R$ bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun.

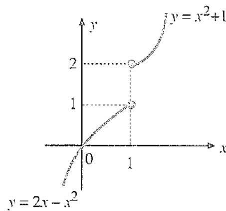
(1) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f$ fonksiyonu **sağdan süreklidir.**

(2) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a) \Leftrightarrow f$ fonksiyonu **soldan süreklidir.**

Yukarıdaki tanım ve süreklilik tanımı gözönüne alındığında şu teorem ifade edilebilir :

TEOREM 2.3 :

Bir fonksiyonun bir noktada sürekli olması için gerek ve yeter şart o noktada sağdan ve soldan sürekli olmasıdır.



ÖRNEK : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \quad ise \\ 2x - x^2, & x < 1 \quad ise \end{cases}$

fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.

Çözüm : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 + 1) = 2 = f(1)$

olduğundan f fonksiyonu $x = 1$ de sağdan süreklidir.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (2x - x^2) = 2 - 1 = 1 \neq f(1) = 2$$

olduğundan fonksiyon $x = 1$ de soldan süreksizdir. Dolayısıyla fonksiyon $x = 1$ de sürekli değildir.

Limit konusunda verilen teoremler gözönüne alındığında, aşağıdaki teoremlerin ispatı kolayca verilebilir. Biz, bu ispatları birer alıştırma olarak okuyucuya bırakıyoruz.

TEOREM 2.4 :

$A \subset R$, $f : A \to R$, $g : A \to R$ fonksiyonları $a \in A$ noktasında sürekli ve $c \in R$ ise $|f|$, f^2, cf, $f + g$, $f - g$ ve $f \cdot g$ fonksiyonları da a da süreklidir. Ayrıca $g(a) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ de a da süreklidir.

ÖRNEK : Polinom fonksiyonlarının her yerde sürekli olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $a \in R$ olsun. Önce $f(x) = x$ fonksiyonunun a da sürekli olduğunu gösterelim.

$\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Öyle bir $\delta > 0$ bulacağız ki $|x - a| < \delta$ için

$|f(x) - f(a)| = |x - a| < \varepsilon$ kalsın. O halde $\delta = \varepsilon$ alınabilir. $f(x) = x$, a da sürekli olduğundan $x \cdot x = x^2$, $x^2 \cdot x = x^3$, $x^3 \cdot x = x^4$ ... $x^{n-1} \cdot x = x^n$ fonksiyonları da a da süreklidir. Sürekli fonksiyonların sabitlerle çarpımı da sürekli olduğundan $c_n x^n$, $c_{n-1}x^{n-1}$, ... , c_2x^2 , c_1x, c_0 fonksiyonları da a da süreklidir.

Sürekli fonksiyonların toplamları da sürekli olduğundan

$P(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 x + c_0$ polinomu da a da süreklidir. a keyfi olduğundan $P(x)$ polinomu her noktada süreklidir.

ÖRNEK : $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{x^2 - 1}$ fonksiyonu hangi noktalarda süreksizdir?

Çözüm : Pay ve payda polinom olduklarından süreklidirler. Şu halde sadece paydayı sıfır yapan noktalarda süreksizdir.

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = -1$ olduğundan, fonksiyon -1 ve 1 noktalarında süreksizdir.

TANIM

Sonlu sayıda süreksizlik noktası olan fonksiyonlara parçalı sürekli fonksiyon denir.

Bir önceki örnekte verilen fonksiyonun iki tane süreksizlik noktası olduğundan bir parçalı sürekli fonksiyondur.

TEOREM 2.5 :

$f: A \to B$ ve $g: B \to C$ fonksiyonları verilmiş olsun. f fonksiyonu a da, g fonksiyonu $f(a)$ da sürekli ise gof fonksiyonu a da süreklidir.

İspat : $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ve $\lim_{x \to f(a)} g(x) = g(f(a))$ dır.

Bu durumda

$$\lim_{x \to a} (gof)(x) = \lim_{x \to a} g(f(x)) = g(\lim_{x \to a} f(x)) = g(f(a)) = (gof)(a)$$

olur ki, bu (gof) fonksiyonunun a da sürekli olduğunu gösterir.

ÖRNEK : $u = \dfrac{1}{x-1}$ olmak üzere $f(u) = \dfrac{1}{u^2 + u - 2}$ fonksiyonu veriliyor.

f fonksiyonunun süreksizlik noktalarının kümesini bulunuz.

Çözüm : $u = \dfrac{1}{x-1}$ fonksiyonu $x = 1$ de süreksizdir.

$f(u) = \dfrac{1}{u^2 + u - 2}$ fonksiyonu da, $u^2 + u - 2 = 0 \Rightarrow u_1 = -2,\ u_2 = 1$ noktalarında süreksizdir. Bu noktalara karşılık gelen x değerleri

$$-2 = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = \frac{1}{2},$$

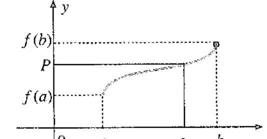
$$1 = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = 2$$

olacağından

$$f(x) = \frac{1}{\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{1-x}\right) - 2}$$

fonksiyonunun süreksizlik noktaları $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ dir.

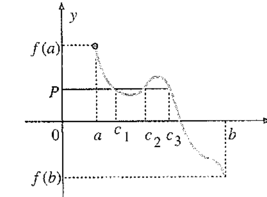
f fonksiyonu (a,b) açık aralığının her noktasında sürekli, a noktasında sağdan sürekli ve b noktasında soldan sürekli ise f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında süreklidir denir.



Kapalı bir aralık üzerinde sürekli olan fonksiyonlar çok önemli özelliklere sahiptir. Bu kesimde bu özellikleri vereceğiz. Bunların ispatı bu kitapta yer almayan başka kavramlara ihtiyaç gösterdiğinden, bunların ispatına girmeyeceğiz. İspatlarını görmek isteyenler, kaynaklar kısmında verilen [3] de bulabilirler.

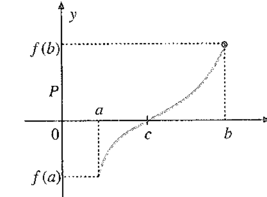
TEOREM 2.6 (Ara Değer Teoremi) :

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. p, $f(a)$ ile $f(b)$ arasında herhangi bir sayı ise, $[a,b]$ aralığında $f(c) = p$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.



Yukarıda sözü edilen c noktası tek değildir. Başka bir deyişle $f(c) = p$ olacak şekilde birden fazla c noktası bulunabilir. Bunu görmek için yandaki şekli incelemek yeterdir.

Ara değer teoreminde $p = 0$ alınırsa şu teorem elde edilir :



TEOREM 2.7 (Balzano Teoremi) :

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. $f(a)$ ile $f(b)$ zıt işaretli ise a ile b arasında $f(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

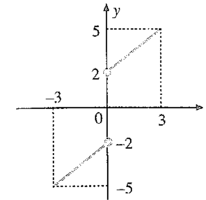
ÖRNEK : $x^3 + x^2 - 1 = 0$ denkleminin 0 ile 1 arasında bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde süreklidir.

$f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$ olduğundan 0 ile 1 arasında $f(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır. Şu halde $c^3 + c^2 - 1 = 0$ dır. Bu c nin bir kök olduğunu gösterir.

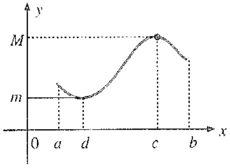
ÖRNEK : $f(x) = \begin{cases} x+2, & 0 \le x \le 3 \ \ ise \\ x-2, & -3 \le x < 0 \ \ ise \end{cases}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

f fonksiyonu $f(-3)$ ile $f(3)$ arasındaki her değeri alır mı? -3 ile 3 arasında $f(c) = 0$ olacak şekilde bir c var mıdır?



Çözüm : Şekilden de görüldüğü gibi $-2 \le p < 2$ için $f(c) = p$ olacak şekilde bir c noktası yoktur. Örneğin $[-3,3]$ aralığındaki hiçbir noktada $f(c) = 1$ olamaz. ($y = 1$ ile fonksiyonun grafiği kesişmediğine dikkat ediniz.)

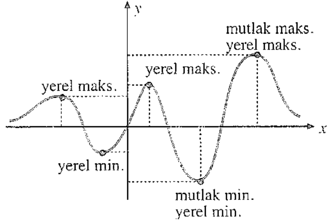
Bu durum f nin sürekli olmamasından kaynaklanmaktadır.



TEOREM 2.7

$f: [a,b] \to R$ fonksiyonu sürekli ise sınırlıdır.

$f: [a,b] \to R$ fonksiyonu sürekli olduğunda $\forall x \in [a,b]$ için $m \leq f(x) \leq M$ olacak şekilde m ve M sayıları vardır.



TANIM

$A \subset R$, $f: A \to R$ bir fonksiyon ve $c \in A$ olsun.

$$|x - c| < \delta$$

şartını sağlayan her $x \in A$ için

$$f(x) \leq f(c)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu c noktasında bir yerel (lokal, rölatif) maksimuma sahiptir denir.

$d \in A$ olsun.

$$|x - d| < \delta$$

şartını sağlayan her $x \in A$ için

$$f(x) \geq f(d)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse, f fonksiyonu d noktasında bir yerel (lokal, rölatif) minimuma sahiptir denir.

Yerel maksimum ve yerel minimum değerlerine fonksiyonun ekstremumları veya ekstrem değerleri adı verilir.

Eğer her $x \in A$ için

$$f(x) \leq f(p)$$

olacak şekilde bir $p \in A$ varsa f fonksiyonu p noktasında bir mutlak maksimuma, her $x \in A$ için

$$f(x) \geq f(r)$$

olacak şekilde bir $r \in A$ varsa, f fonksiyonu r noktasında bir mutlak minimuma sahiptir denir. $f(p)$ sayısına fonksiyonun en büyük değeri, $f(r)$ sayısına da fonksiyonun en küçük değeri denir.

Yukarıdaki tanıma göre her mutlak maksimum aynı zamanda bir yerel maksimumdur. Aynı şey mutlak minimum için de doğrudur. Fakat bunun karşıtı doğru değildir. Bir fonksiyonun yerel maksimum ve yerel minimum değerleri birden fazla olabilir, fakat mutlak maksimum ve mutlak minimum değerleri varsa tektir.

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ise en büyük ve en küçük değerlerini [a,b] aralığının noktalarında alır. Dolayısıyla mutlak minimuma ve mutlak maksimuma sahiptir. Aşağıdaki teorem bize bu değerlerin nasıl bulunabileceğini göstermektedir.

TEOREM 2.8 :

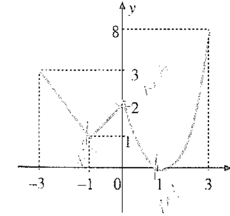
$f: [a,b] \to R$ fonksiyonu sürekli olsun. f fonksiyonu yerel ekstrem değerlerini (a,b) aralığının $c_1, c_2, \ldots, c_n$ noktalarında almış olsun.

$$f(a), f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n), f(b)$$

sayılarının en büyüğü, fonksiyonun mutlak maksimum değeri, en küçüğü fonksiyonun mutlak minimum değeridir.

İspat : Eğer f fonksiyonu bir mutlak ekstrem değerini $[a,b]$ aralığının bir iç noktasında alırsa bu değer, $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n)$ yerel ekstremumlarından biridir. Fakat fonksiyon mutlak ekstrem değerlerini a ve b uç noktalarında da alabilir. Bu nedenle $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n)$ sayılarını $f(a)$ ve $f(b)$ ile de karşılaştırmak gerekir.

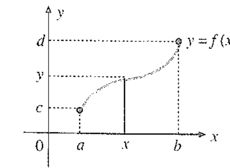
ÖRNEK : $f(x) = \begin{cases} -x, & -3 \leq x < -1 \text{ ise} \\ x+2, & -1 \leq x < 0 \text{ ise} \\ 2(x-1)^2, & 0 \leq x \leq 3 \text{ ise} \end{cases}$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun yerel ekstremum ve mutlak ekstremum değerlerini bulunuz.



Çözüm : Fonksiyonun grafiği yandaki gibidir. Görüldüğü gibi, fonksiyon [−3,3] aralığında bir sürekli fonksiyondur. Fonksiyon mutlak minimum değerini [−3,3] aralığının bir iç noktası olan 1 noktasında almaktadır. Bu nokta aynı zamanda bir yerel minimum noktasıdır. Fonksiyon mutlak maksimum değerini, [−3,3] aralığının bir uç noktası olan 3 noktasında almaktadır. Buna göre fonksiyonun en küçük değeri $f(1) = 0$, en büyük değeri $f(3) = 2 . (3-1)^2 = 8$ dir.

Her $x \in [-3,3]$ için $0 \leq f(x) \leq 8$ dir.

Birebir ve örten fonksiyonların terslerinin varolduğu bilinmektedir. Şimdi bu ters fonksiyonun hangi özelliklere sahip olduğunu gösteren bir teoremi ifade edelim.



TEOREM 2.9 :

$f: [a,b] \to R$ sürekli ve kesin artan bir fonksiyon olsun. $f(a) = c$ ve $f(b) = d$ ise

(1) $f: [a,b] \to [c,d]$ fonksiyonunun $f^{-1}: [c,d] \to [a,b]$ tersi vardır.

(2) f^{-1} fonksiyonu $[c,d]$ üzerinde kesin artandır.

(3) f^{-1} fonksiyonu $[c,d]$ üzerinde süreklidir.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonlarının sürekli olup olmadıklarını araştırınız. Süreksiz oldukları durumlarda süreksizlik çeşidini belirtiniz.

(a) $f(x) = x + |x|$

(b) $f(x) = \sqrt{x - [\![x]\!]}$

(c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} [\![x]\!] + [\![-x]\!], & x \notin Z \\ -1, & x \in Z \end{cases}$

(e) $f(x) = x^2 + \operatorname{sgn}(x^2 - 1)$

(f) $f(x) = \operatorname{sgn}(x^3 - x)$

(g) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \text{ ise} \\ x - 1, & x < 1 \text{ ise} \end{cases}$

(h) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sin x}{|x|}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 2, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

(ı) $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{2x}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

(i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 2, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

(j) $f(x) = |x - 3|$

2. Aşağıdaki bağıntılarla tanımlanan fonksiyonlar R nin hangi noktalarında süreksizdir. Süreksizlik çeşidini belirtiniz.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$ (ç) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

(d) $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ (e) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$

3. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \text{ ise} \\ m, & x = 2 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun her yerde sürekli olması için m ne olmalıdır?

4. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \text{ ise} \\ 2ax, & x \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun her yerde sürekli olması için a ne olmalıdır?

5. $f(x) = [\![x^2 - 2x]\!]$ fonksiyonu $x = 1$ noktasında sürekli midir?

6. $f(x) = \begin{cases} 2\cos x, & x < 0 \text{ ise} \\ a\cos x + b, & 0 \leq x \leq \pi \text{ ise} \\ -\sin x, & x > \pi \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun her yerde sürekli olması için a ve b ne olmalıdır?

7. $f(x) = \begin{cases} -|x+1|, & x < 0 \text{ ise} \\ |x - 1|, & x > 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu $x = 0$ da tanımlı değildir.

(a) fonksiyonun $x = 0$ da sağdan sürekli olması için $f(0)$ ne olmalıdır?

(b) fonksiyonun $x = 0$ da soldan sürekli olması için $f(0)$ ne olmalıdır?

8. $f(x) = [\![x]\!] + [\![-x]\!]$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz. Fonksiyon hangi noktalarda süreksizdir. Bu süreksizlik ne tür bir süreksizliktir?

9. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonu için $f(-1) = -1, f(1) = 1$ dir. Fonksiyon -1 ile 1 arasındaki sıfır değerini alır mı? Bu sonuç Balzano Teoremi ile çelişir mi?

10. $x^6 + 2x - 2 = 0$ denkleminin -2 ile -1 ve 0 ile 1 arasında birer köke sahip olduğunu gösteriniz. Denklemin başka kökü var mıdır?

($y = 2 - 2x$ doğrusu $y = x^6$ eğrisini kaç noktada keser?)

11. $8x^3 - 12x^2 - 2x + 3 = 0$ denkleminin $(-1,0)$, $(0,1)$ ve $(1,2)$ aralıklarında birer köke sahip olduğunu gösteriniz. $x = \dfrac{t}{2}$ koyarak denklemin bu üç kökünü bulunuz.

12. Aşağıdaki denklemlerin karşılarında yazılı aralıklarda birer köke sahip olduklarını gösteriniz.

(a) $x^2 - 5 = 0$, $I = [2,3]$

(b) $x^3 + x + 1 = 0$, $I = [-1,0]$

(c) $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$, $I = [0,1]$

(d) $x^3 - 5 = 0$, $I = [1,2]$

(e) $x^4 + 2x - 1 = 0$, $I = [0,1]$

(f) $x^5 - 5x^3 + 3 = 0$, $I = [-3,-2]$

13. $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ noktalarındaki fonksiyon değerlerinden yararlanarak aşağıdaki denklemlerin üçer köke sahip olduklarını gösteriniz.

(a) $x^3 - 4x + 1 = 0$

(b) $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$

14. $f(x) = \begin{cases} \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu $x = 0$ da sürekli midir?

15. Sürekli $f : [a,b] \to R$, $g : [a,b] \to R$ fonksiyonları ve bir $x_0 \in (a,b)$ noktası verilmiş olsun.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0}$$

ise f ve g fonksiyonlarının grafikleri x_0 da teğettir denir.

$f(x) = 2x^2$ ve $g(x) = -x^2 + 6x - 3$ fonksiyonlarına ait grafiklerin $x_0 = 1$ noktasında teğet olduklarını gösteriniz.

16. $f : [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu sürekli olsun. $[a,b]$ de

$$f(c) = c$$

olacak şekilde bir c sayısının var olduğunu gösteriniz. Bu c sayısına fonksiyonun bir sabit noktası denir.

Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan

$f : [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonlarının sabit noktalarını bulunuz.

(a) $f(x) = 1 - x^2$ (b) $f(x) = x^2$

(c) $f(x) = 1 - x$ (d) $f(x) = x$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{2}$ (f) $f(x) = \sin x$

17. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & -2 \leq x < 0 \\ -(x^2 + 2), & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$

fonksiyonu veriliyor. $[-2,2]$ aralığında $f(x) = 0$ olacak şekilde bir x noktası var mıdır?

18. $a_n \cdot a_0 < 0$ olmak üzere

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

denkleminin en az bir pozitif köke sahip olduğunu gösteriniz.

19. $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli ve reel değerli bir f fonksiyonu veriliyor.

$$f(a) \geq a \text{ ve } f(b) \leq b$$

olduğunda, f fonksiyonunun bir sabit noktaya sahip olacağını gösteriniz.

[$g(x) = f(x) - x$ fonksiyonunu gözönüne alınız.)

1. (a) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}$

fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

(b) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ limitini hesaplayınız.

2. (a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin \alpha x - \tan \alpha x}{x^3}$ ve

(b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos^3 3x - \cos^3 2x}{x^2}$

limitlerini hesaplayınız.

3. $\lim_{x \to 0} [\![\sin x + \cos x]\!]$ limitini hesaplayınız.

4. f ve g aşağıdaki şartları sağlayan iki fonksiyon olsun.

$0 < |x - 2| < \dfrac{3\varepsilon}{2}$ ise $|f(x) - 3| < \varepsilon$

$0 < |x - 2| < \varepsilon + \sqrt{\varepsilon}$ ise $|g(x) - 4| < \varepsilon$.

Öyle bir $\delta > 0$ bulunuz ki

$0 < |x - 2| < \delta$ olduğunda $|f(x) + g(x) - 7| < \dfrac{1}{50}$

olsun.

5. $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ve $\lim_{x \to a} f(x) = M$ ise $L = M$ dir.

Önermesinin doğruluğunu gösteriniz. Bunun anlamını belirtiniz.

6. Öyle bir f fonksiyonu bulunuz ki

$\lim_{x \to 0} |f(x)| = 1$ fakat $\lim_{x \to 0} f(x)$ mevcut olmasın.

$|f|$ sürekli ise f sürekli midir?

7. Her $x \neq a$ için $|f(x)| \leq M\,|x - a|$

olacak şekilde bir M sayısı varolduğunda

$\lim_{x \to a} f(x) = 0$ olacağını gösteriniz.

8. Tanım kümesinin her x elemanı için

$f(x) \geq 0$ ve $\lim_{x \to a} [f(x)]^2 = L > 0$ olsun.

$\lim_{x \to a} f(x) = \sqrt{L}$

olduğunu gösteriniz.

9. $\lim_{x \to 0} f(x) = L$ ise her $n \in N$ için

$\lim_{x \to 0} f(x^n) = L$

olacağını gösteriniz.

10. Öyle f ve g fonksiyonları bulunuz ki

$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$ mevcut fakat

$\lim_{x \to a} f(x)$ *ve* $\lim_{x \to a} g(x)$ mevcut olmasın.

11. Öyle f ve g fonksiyonları bulunuz ki

$\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ mevcut fakat f ve g den en az biri $x = 0$ da limitli olmasın.

12. $a > 0$ için

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right|$$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{4x^2 + 8x + 1} - \sqrt{4x^2 - 3x - 1}\right) = \frac{11}{4}$$

olduğunu gösteriniz.

13. $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ise $\lim_{x \to -a} f(-x) = L$ dir, gösteriniz.

14. $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ olduğunda $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ olacağını gösteriniz.

15. $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ve g fonksiyonu L de sürekli ise

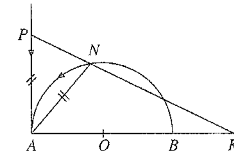
$\lim_{x \to a} (gof)(x) = g(L)$ olacağını gösteriniz.

16. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim_{x \to 0} \sqrt{\tan x + 3\sec x}$

(b) $\lim_{x \to 0} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} \cos(\tan x)\right)$

17.



Şekilde AP doğrusu $[AB]$ çaplı yarı çembere A da teğettir. P ve N noktaları $|AP| = |AN|$ kalacak şekilde A noktasına doğru hareket ettiriliyor.

$|AB| = 2$ birim olduğuna göre,

$\lim_{P \to A} |BK|$ kaç birimdir?

Başka bir deyişle, P noktası A ile çakışırken K noktası B den kaç birim uzaklaşır?

18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(1 + x)^n - 1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ k, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonunun R de sürekli olması için k ne olmalıdır?

19. Aşağıdaki bağıntılarla tanımlanan fonksiyonların süreksizlik noktalarını bulup bu noktadaki sıçrama miktarlarını hesaplayınız.

(a) $f(x) = \dfrac{2(x - 1)}{x^2 - x^3}$

(b) $f(x) = \arctan \dfrac{1}{x - 3}$

20. Aşağıda verilen f ve g fonksiyonları için (gof) fonksiyonunun süreksizlik noktalarını bulunuz.

(a) $f(x) = \tan x$, $\quad g(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \geq 0 \text{ ise} \\ x + 1, & x \leq 0 \text{ ise} \end{cases}$, $\quad g(x) = x^2$

21. Aşağıdaki fonksiyonların tanımlı fakat süreksiz oldukları noktaları bulunuz.

(a) $f(x) = \cos(x^n)$, $n \in N$

(b) $g(x) = \cos(\ln x)$

(c) $h(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2} - \cos^2 x}$

22. $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ olsun.

$g(x) = (fofof)(x)$

fonksiyonunun $x_1 = 0$ ve $x_2 = 1$ noktalarında süreksiz olduğunu gösteriniz.

23. $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - \sin \pi + 3$ fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında $\dfrac{7}{3}$ değerini alabilir mi?

24. n bir doğal sayı olmak üzere,

$f : R \to R$, $f(x) = x^{2n+1}$ fonksiyonunun sürekli ve artan olduğunu gösteriniz.

Bunun tersi olan $f^{-1}(x) = \sqrt[2n+1]{x}$ fonksiyonunun da sürekli ve artan olacağını gösteriniz.

25. $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ pozitif sayılar olmak üzere

$$f(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n-1} + \ldots + a_n x + a_{n+1}$$

fonksiyonunun sürekli ve artan bir tersinin var olduğunu gösteriniz.

26. Reel katsayılı ve tek dereceli her polinom denkleminin, yani

$$a_0x^{2n+1} + a_1x^{2n} + \dots + a_{2n}x + a_{2n+1} = 0$$

denkleminin en az bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

27. f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. $f(x) = 0$ denklemi $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ bağıntısını sağlayan n tane köke sahip olsun.

$$(a,x_1)\ ,\ (x_1,x_2)\ ,\ \dots\ ,\ (x_n,b)$$

aralıklarının her birinde $f(x)$ in aynı işaretli olduğunu, yani sözkonusu herbir aralıkta işaret değiştirmediğini, gösteriniz.

Bundan yararlanarak

$$f(x) = x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3)$$

fonksiyonunun $[-1,\ 5]$ aralığındaki işaretini inceleyiniz.

28. $\sin x - x + 1 = 0$ denkleminin bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

$ax + b\sin x = c$ denklemi daima bir köke sahip midir?

29. $$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun hiçbir noktada sürekli olmadığını gösteriniz.

30. $$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ rasyonel ise} \\ -x^2, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun sadece $x = 0$ da sürekli olduğunu gösteriniz.

31. $f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (\sin x)^{2n}$

fonksiyonu hangi noktalarda süreksizdir?

32. $f : A \to R$, $g : A \to R$ fonksiyonları için,

maks (f, g) ve $\min(f, g)$ fonksiyonları

$$\text{maks}\,(f, g)(x) = \text{maks}\,\{f(x), g(x)\}$$

$$\min(f, g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

biçiminde tanımlanıyor.

f ve g, a noktasında sürekli olduğunda maks(f,g) , $\min(f,g)$ fonksiyonlarının da a da sürekli olacağını gösteriniz.

33. $$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor. Aşağıdaki fonksiyonların süreklilik durumlarını inceleyiniz.

(a) $x\,f(x)$ (b) $|x|\,f(x)$

(c) $\dfrac{|x|}{x}\,f(x)$ (d) $\sin x\,f(x)$

34. $f : R \to R$ fonksiyonu her yerde sürekli bir fonksiyon olsun. $c > 0$ için

$$f_c(x) = \begin{cases} c, & f(x) > c \text{ ise} \\ f(x), & |f(x)| \le c \text{ ise} \\ -c, & f(x) < -c \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f_c fonksiyonunun her yerde sürekli olduğunu gösteriniz.

35. (a) f fonksiyonu a da sürekli,

g fonksiyonu a da sürekli değilse,

$f\,.\,g$ a da sürekli midir?

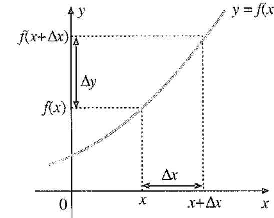
(b) f ve g a da süreksiz ise

$f\,.\,g$ a da sürekli olabilir mi?

3 TÜREV

Matematik, mühendislik, fizik, ekonomi, kimya ve istatistikte karşılaşılan konulardan biri de değişkene verilen bir artmanın fonksiyonda meydana getireceği değişikliğin, değişkendeki artmaya oranının limit durumudur. Bu, matematikte teğetin eğimi, fizikte hız ve ivme, kimyada reaksiyon hızı, ekonomide marjinal gelir ve marjinal fiat kavramlarını açıklamada kullanılır. Bu bölümde, türev denilen bu kavram tanıtılacak, bundan sonraki bölümde çeşitli uygulamalara yer verilecektir.

3.1 TÜREV KAVRAMI



$y = f(x)$ ile verilen f fonksiyonu x in bir komşuluğunda tanımlı olsun. x değişkenine Δx artması verildiğinde fonksiyondaki değişme miktarı

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

olur. Bu durumda, fonksiyondaki değişmenin değişkendeki değişmeye oranı

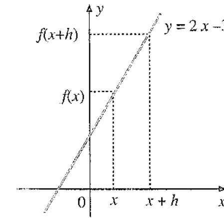
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

olacaktır. Δx, h ile gösterilirse, bu oran

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

biçimini alır.

ÖRNEK : $f(x) = 2x + 3$ ve $g(x) = x^2$ fonksiyonları için değişim oranlarını hesaplayınız.

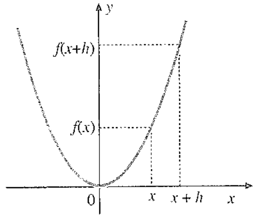


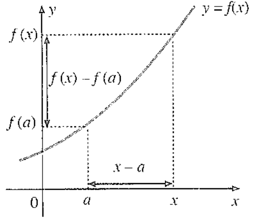
Çözüm : $f(x + h) - f(x) = 2(x + h) + 3 - 2x - 3 = 2h$

olduğundan, değişim oranı

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{2h}{h} = 2$$

olur. Şu halde her h değişimi için oran sabit olup 2 dir.





$$g(x+h)-g(x)=(x+h)^2-x^2=x^2+2hx+h^2-x^2$$
$$=2hx+h^2$$

olacağından, değişim oranı

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{2hx+h^2}{h}=2x+h$$

bulunur. Görüldüğü gibi, bu oran hem x noktasına hem de h artmasına bağlıdır.

f fonksiyonu bir a noktasının bir komşuluğunda tanımlı ve x de bu komşuluğun bir noktası olsun. Bu durumda değişim oranı

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

olacaktır.

TANIM 3.1 :

$A\subset R,\ a\in A$ ve f de A da tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (3.1)$$

limiti veya $x=a+h$ koymakla elde edilen

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad (3.2)$$

limiti varsa f fonksiyonu a noktasında *türevlenebilirdir* veya *diferensiyellenebilirdir* denir. Bu türev

$$f'(a)\ ,\ \frac{df}{dx}\ ,\ Df(a)$$

sembollerinden biri ile gösterilir.

Eğer (3.1) de x sadece a dan büyük değerlerden a ya yaklaşıyorsa yahut (3.2) de h sadece pozitif değerlerden sıfıra yaklaşıyorsa, bu limitler a noktasındaki *sağ taraflı türev* adını alır. Şayet

$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad veya \quad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

limitleri varsa bu limite f nin a noktasındaki *sol taraflı türevi* denir. Türevi bulma işlemine türev alma adı verilir.

Limit kavramı gözönüne alındığında şu sonuç ifade edilebilir.

TEOREM 3.1 :

a noktasındaki türevin varolması için gerek ve yeter şart, sağ ve sol türevlerin var ve birbirlerine eşit olmasıdır.

ÖRNEK : $f(x)=x^3+2x$ fonksiyonunun $a=1$ noktasındaki türevini bulunuz.

Çözüm :

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x-3}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+3)=5$$

olur.

ÖRNEK : $f(x)=|x|$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki türevini hesaplayınız.

Çözüm :

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

olur.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

olduğundan sağ türev 1, sol türev –1 dir. Dolayısıyla türev yoktur.

Şimdi türevlenebilme ile süreklilik arasındaki ilişkiyi veren teoremi ispatlayalım.

TEOREM 3.2 :

$A\subset R,\ a\in A$ ve f, A üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu a noktasında türevli ise aynı noktada süreklidir.

İspat : f, a noktasında türevli olduğundan

$$g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

biçiminde tanımlanan

$g : A \setminus \{a\} \to R$ fonksiyonunun a noktasında limiti vardır ve bu limit $f'(a)$ dır.

$$f(x) = f(a) + (x - a)\, g(x)$$

yazılabildiğinden

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left[f(a) + (x - a)\, g(x) \right]$$

$$= f(a) + 0 . f'(a) = f(a)$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

Yukarıdaki örnekte verilen $f(x) = |x|$ fonksiyonu $x = 0$ da sürekli olduğu halde türevli değildir. Şu halde süreklilik türevliliği gerektirmez. Bu teoremden şu sonuç ifade edilebilir :

SONUÇ 3.1 :

Bir fonksiyon bir noktada sürekli değilse türevli de değildir.

3.2 TÜREV ALMADA GENEL KURALLAR

Bu kesimde temel türev alma kuralları verilecektir.

TEOREM 3.3 :

Eğer c bir sabitse $(c)' = 0$ dır.

İspat : $f(x) = c$ alınırsa

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

bulunur.

TEOREM 3.4 :

$n \in N$ için $(x^n)' = n . x^{n-1}$ dir.

İspat :

$$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h - x)\left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} x + \dots + x^{n-1}\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2} x + (x+h)^{n-3} x^2 + \dots + (x+h) x^{n-2} + x^{n-1}\right]$$

$$= \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + \dots + x^{n-1} + x^{n-1}}_{\text{n tane}} = n\, x^{n-1}$$

olur.

TEOREM 3.5 :

f türevlenebilen bir fonksiyon ve c bir sabitse

$$\left[c\, f(x)\right]' = c\, f'(x)$$

dir.

İspat : $\left[c\, f(x)\right]' = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{c\, f(x+h) - c\, f(x)}{h} = c \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = c\, f'(x)$

TEOREM 3.6 :

f ve g, $A \subset R$ üzerinde tanımlı ve $x \in A$ noktasında türevlenebilen fonksiyonlar ise $f + g$ de x noktasında türevlenebilir ve

$$\left[f(x) + g(x)\right]' = f'(x) + g'(x)$$

dir.

İspat :

$$\left[f(x) + g(x)\right]' = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x) + g'(x) .$$

Teorem 3.5 ve 3.6 dan birleştirilerek şu sonuç ifade edilebilir.

SONUÇ 3.2 :

f ve g, x noktasında türevlenebilen fonksiyonlar ve a ile b sabitlerse, $af + bg$ fonksiyonu da x noktasında türevlenebilir ve

$$\left[a\, f(x) + b\, g(x)\right]' = a\, f'(x) + b\, g'(x)$$

dır.

Teorem 3.4 ve Sonuç 3.2 den

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)' = n\, a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1$$

yazılabilir.

ÖRNEK : $P(x) = 3x^5 + 4x^4 + 2x^3 - 8x^2 - x + 1$ polinomunun türevini alınız.

Çözüm : $P'(x) = 5.3x^4 + 4.4x^3 + 3.2x^2 - 2.8x - 1$

$= 15x^4 + 16x^3 + 6x^2 - 16x - 1$

olur.

> **TEOREM 3.7 :**
> f ve g, x noktasında türevli iki fonksiyon ise
> $f.g$ de x noktasında türevli olup
> $$[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$$
> dir.

$$(f.g)'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(f.g)(x+h) - (f.g)(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} . g(x+h) + f(x) . \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\}$$

$$= f'(x) . \lim_{h\to 0} g(x+h) + f(x) . g'(x)$$

yazılabilir. Diğer taraftan g fonksiyonu x noktasında türevlenebilir olduğundan bu noktada süreklidir. Dolayısıyla

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$$

olacaktır. Buna göre

$$(f.g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) = (f'g + fg')(x)$$

olur.

O halde f ve g nin türevlenebilir olduğu her $x \in A$ için

$$[f(x)\ g(x)]' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

elde edilir.

ÖRNEK : $f(x) = (x^2 + 1)(x^5 + 4x^2 + 2x + 1)$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız.

Çözüm :

$$f'(x) = (x^2+1)'\,(x^5+4x^2+2x+1) + (x^2+1)\,(x^5+4x^2+2x+1)'$$

$$= 2x\,(x^5+4x^2+2x+1) + (x^2+1)\,(5x^4+8x+2)$$

$$= 2x^6 + 8x^3 + 4x^2 + 2x + 5x^6 + 8x^3 + 2x^2 + 5x^4 + 8x + 2$$

$$= 7x^6 + 5x^4 + 16x^3 + 6x^2 + 10x + 2$$

olur.

ÖRNEK : $y = [f(x)]^2$ ve $y = [f(x)]^3$ fonksiyonlarının türevlerini bulunuz.

$y = [f(x)]^n$ için bir türev formülü elde ediniz.

Çözüm :

$$\{[f(x)]^2\}' = \{f(x).f(x)\}' = f'(x).f(x) + f'(x).f(x) = 2\,f(x).f'(x)$$

olur.

$$\{[f(x)]^3\}' = \{[f(x)]^2.f(x)\} = 2\,f(x)\,f'(x)\,f(x) + [f(x)]^2\,f'(x) = 3\,[f(x)]^2\,f'(x)$$

bulunur. Benzer yolla, her $n \in N$ için

$$\{[f(x)]^n\}' = n\,[f(x)]^{n-1}\,f'(x)$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

$y = [f(x)]^n$ ifadesinde $f(x) = u$ denirse $y = u^n$

olur. Bu durumda

$$n\,[f(x)]^{n-1} = n\,u^{n-1} = \frac{dy}{du}, \quad f'(x) = \frac{du}{dx}$$

olacağından

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

yazılabilir. Bu yönteme zincir kuralı adı verilir. Bu kural diğer fonksiyonlar için de geçerlidir. Bununla ilgili genel teorem aşağıda verilmiştir.

> **TEOREM 3.8 :**
> f fonksiyonu x de, g fonksiyonu $f(x)$ de türevli ise gof fonksiyonu x de türevli olup
> $$(gof)'(x) = [g(f(x))]' = g'(f(x))\,f'(x)$$
> dir.

İspat :

$$(gof)'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{(gof)(x+h)-(gof)(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h)-g(f(x))}{h} \quad \text{dır.}$$

$f(x) = y$ ve $f(x+h) - f(x) = k$ diyelim. k, h ya bağlı olup, f nin x noktasında sürekli olmasından

$$\lim_{h\to 0} k = 0$$

dır. Ayrıca

$$\lim_{h\to 0}\frac{k}{h} = f'(x_0)$$

olacaktır. Eğer x_0 noktasının bir komşuluğunda $k \neq 0$ ise yukarıdaki limit, pay ve payda k ile çarpılarak,

$$(gof)'(x_0) = \lim_{h\to 0}\left[\frac{g(y_0+k)-g(y_0)}{k}\cdot\frac{k}{h}\right]$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$(gof)'(x) = g'(y)\ f'(x)$$

bulunur.

x noktasının her komşuluğunda $k = f(x+h) - f(x)$ ifadesi sonsuz çokluktaki noktada sıfır değerini alabilir. Bu durumda yukarıdaki çarpma işlemini yapmak hatalı olur.

$$\lambda(t) = \begin{cases} \dfrac{g(y_0+t)-g(y_0)}{t} - g'(y_0), & t \neq 0 \ \text{ ise} \\ 0, & t = 0 \ \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan λ fonksiyonunu gözönüne alalım.

$$\lim_{t\to 0}\lambda(t) = 0 = \lambda(0)$$

olduğundan λ fonksiyonu $t = 0$ da süreklidir.

$$y\,(y_0+t) - g(y_0) = t\,[\lambda(t) + g'(y_0)\,]$$

olacağından ,

$$(gof)'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{g(y_0+h)-(y_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k[\lambda(k)+g'(y_0)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}[\lambda(k)+g'(y_0)]\cdot\lim_{h\to 0}\frac{k}{h} = g'(y_0)\cdot f'(x_0)$$

bulunur.

Buna göre $(gof)(x) = g(f(x))$ fonksiyonunun türevini almak için önce (gof) nin f ye göre türevini alıp, f nin x e göre türevi ile çarpmalıdır.

Bileşik fonksiyonların bu türev alma kuralına zincir kuralı denir ve bu kural daha karışık bileşik fonksiyonlar için de kullanılır. Örneğin

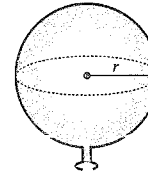
$$y = f(u(v(w(x))))$$

şeklinde bir bileşik fonksiyon verilir ve gerekli türevlenebilme şartları sağlanırsa

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}$$

olur.

ÖRNEK : Hava ile şişirilen küre şeklindeki bir balonun r yarıçapının artma oranı, $r = 4$ olduğunda 0,3 cm/s dir. Bu anda hacminin değişme (artma) oranı nedir?



Çözüm :

$r = 4$ için $\dfrac{dr}{dt} = 0,3\ cm/s$ dir.

$V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ olduğundan $\dfrac{dV}{dr} = 4\pi r^2 = 64\pi$ dir. Zincir kuralından

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\cdot\frac{dr}{dt} = 64\pi\ .\ (0,3) \cong 60,544\ \text{cm}^3/\text{s}$$

bulunur.

> **TEOREM 3.9 :**
>
> f ve g, x noktasında türevli iki fonksiyon ve $g(x) \neq 0$ ise, $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonu da x noktasında türevlidir ve
>
> $$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{[g(x)]^2}$$
>
> dir.

İspat :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f}{g}(x+h) - \frac{f}{g}(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{h\,g(x)\,g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\,g(x) - f(x)\,g(x) + f(x)\,g(x) - f(x)\,g(x+h)}{h\,g(x)\,g(x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x)\,g(x+h)} \left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,g(x) - f(x)\,\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right]$$

$$= \frac{1}{g^2(x)} . (f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(x)$$

olur. O halde f ve g nin türevlenebilir ve g nin sıfır olmadığı her x noktasında

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

olur.

ÖRNEK : $n \in N$ için $f(x) = x^{-n}$ şeklinde tanımlanan $f : R - \{0\} \to R$ fonksiyonunun türevini bulalım.

$$f'(x) = (x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{0 . x^n - n . x^{n-1} . 1}{(x^n)^2} = -n . x^{-n-1}$$

olur. Demek ki $k \in Z$ olmak üzere

$$(x^k)' = k\,x^{k-1}$$

yazılabilir.

ÖRNEK : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+2}$ fonksiyonunun türevini bulunuz. $f'(0)$ nedir?

Çözüm :

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)'.(x+2) - (x+2)'.(x^2+1)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2x(x+2) - 1(x^2+1)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x-1}{(x+2)^2}$$

olur. $x = 0$ konursa

$$f'(0) = -\frac{1}{4}$$

bulunur.

3.3 TERS FONKSİYONUN TÜREVİ

$A, B \subset R$ ve $f : A \to B$ fonksiyonu birebir örten ise bu takdirde $f(x) \in B$ sayısını $x \in A$ noktasına dönüştüren bir $f^{-1} : B \to A$ fonksiyonunun mevcut olduğunu biliyoruz. Şimdi f fonksiyonunun türevi ile f^{-1} fonksiyonunun türevi arasındaki ilişkiyi veren teoremi ispatlayalım.

TEOREM 3.10 :
$A, B \subset R$ ve $f : A \to B$ fonksiyonu birebir örten olsun. f fonksiyonu $x_0 \in A$ da türevlenebilir ve $f'(x_0) \neq 0$ ise $f^{-1} : B \to A$ fonksiyonu da $y_0 = f(x_0)$ da türevlenebilir ve

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

dır.

İspat :

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

olur. [f fonksiyonu x_0 da türevlenebilir olduğundan aynı zamanda süreklidir. Dolayısıyla f^{-1} de y_0 da süreklidir. Şu halde $y \to y_0$ için $x \to x_0$ dır.]

ÖRNEK : $f(x) = x^5 + x$ eşitliği ile tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonu veriliyor. $(f^{-1})'(2)$ türevini hesaplayınız.

Çözüm : $y_0 = 2$ olduğundan

$$x^5 + x = 2 \Rightarrow x_0 = 1$$

olur. $f'(x) = 5x^4 + 1 \Rightarrow f'(1) = 6$ olacağından

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

bulunur.

1. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan fonksiyonların, eğer varsa, karşılarında yazılı noktalardaki türevlerini hesaplayınız. Fonksiyonlar bu noktalarda sürekli midir?

(a) $f(x) = |x-1|$, $x = 1$

(b) $f(x) = [\![x]\!]$, $x = 2$

(c) $f(x) = x\,|x|$, $x = 0$

(ç) $f(x) = x^5$, $x = 1$

(d) $f(x) = x\,[\![x]\!]$, $x = 0$

(e) $f(x) = [\![x^2]\!]$, $x = 0$

(f) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \text{ ise} \\ -x^2, & x < 0 \text{ ise} \end{cases}$

2. Aşağıdaki fonksiyonların türevini bulunuz.

(a) $x = 7x - 11$

(b) $g(x) = x^5 + 6x^3 + 3$

(c) $h(u) = 4\sqrt{u} + 2u^2$

(ç) $k(t) = 50 - 2t^3$

(d) $s(t) = 3t - 5t^2$

3. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

(a) $f(x) = (x+1)^3$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}$

(c) $h(x) = x(x-1)(x-2)$

(ç) $k(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

(d) $s(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

(e) $t(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

(f) $u(x) = (1-x)(1-x^2)^2$

(g) $v(x) = (x^2 - 2x + 1)^2$

(h) $w(x) = (x^2+1)^3$

4. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktalardaki türevlerini bulunuz.

(a) $f(x) = (2x+3)^{100}$, $x = 0$

(b) $g(x) = (1 + x^{-2})^{50}$, $x = 1$

(c) $h(x) = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$, $x = 0$

(ç) $k(x) = \dfrac{(1-x)^2}{(1+x)^3}$, $x = 0$

(d) $l(x) = \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{10}$, $x = 0$

(e) $m(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^2}$, $x = 0$

(f) $n(x) = x\sqrt{1+x^2}$, $x = 0$

(g) $p(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $x = 1$

(h) $r(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, $x = 1$

(ı) $s(x) = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}$, $x = 0$

(i) $t(x) = x^{3/2} - x^{4/3} + 1$, $x = 1$

(j) $u(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, $x = 4$

(k) $v(x) = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$, $x = 1$

(l) $w(x) = \left(2x + \dfrac{1}{x}\right)^{-6}$, $x = 1$

$f'(1) = 3$ olduğuna göre,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) + f(1-h)}{h}$$

limitinin değeri nedir?

5. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$

fonksiyonu için $f'(0)$ türevini hesaplayınız.

6. $f(x) = x^3 + 4x$ fonksiyonu için $(f^{-1})'(5)$ türevini hesaplayınız.

7. f ve g türevlenebilen fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar ve türevlerinin $-1, 0, 1, 2$ noktalarındaki değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

$(fog)'(x)$ ve $(gof)'(x)$ türevlerinin verilen noktalardaki değerlerini bulunuz.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
-1	1	2	0	-1
0	2	-1	2	0
1	1	2	-1	-1
2	0	1	1	2

8. f ve g fonksiyonları ile bunların türevlerinin 1 ve 3 noktalarındaki değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	1	3	-1	0
3	4	1	3	2

Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktalardaki türevlerini bulunuz.

(a) $2f$ $x = 3$

(b) $f + g$ $x = 1$

(c) $f \cdot g$ $x = 1$

(d) f/g $x = 3$

(e) fog $x = 1$

(f) $\sqrt{f}$ $x = 3$

(g) $\dfrac{1}{g^2}$ $x = 1$

(h) $\sqrt{f^2 + g^2}$ $x = 3$

(ı) $f^2 og$ $x = 1$

9. Tek fonksiyonların türevinin çift, çift fonksiyonların türevinin tek olacağını gösteriniz. Türevi tek olan fonksiyon çift, türevi çift olan fonksiyon tek olmak zorunda mıdır?

10. $f(0) = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x} = 2$ ve $g(x) = (x^2+3)^4 f(x)$

dir. $g'(0)$ türevini hesaplayınız.

11. $f(x) = \cos x$, $g(y) = \dfrac{\pi}{6} y^2 + y - 1$ ve

$h(z) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + z + z^2}}$ olduğuna göre,

$(fogoz)'(0)$ türevini bulunuz.

12. $f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

olduğuna göre $f'(x)$ türevini hesaplayınız.

f' fonksiyonu sürekli midir?

13. g, $g(0) = g'(0) = 0$ özelliğine sahip türevlenebilen bir fonksiyon olsun.

$f(x) = \begin{cases} g(x) \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun türevlenebilir ve $f'(0) = 0$ olduğunu gösteriniz.

14. $g(x) = 1 + \sqrt{x}$ ve $(gof)(x) = 3 + 2\sqrt{x} + x$ olsun.

$f'(4)$ türevini

(a) $f(x)$ ifadesini bularak

(b) Zincir kuralı ile

hesaplayınız.

3.4 TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

1) $f(x) = \sin x$ şeklinde tanımlanan $f: R \to R$ fonksiyonunun türevini bulalım.

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin x\cosh + \sinh\cos x - \sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cosh - 1}{h}.\sin x + \lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h}\cos x$$

olur. Diğer taraftan

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cosh-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(1-2\sin^2\frac{h}{2}\right)-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2\left(\sin\frac{h}{2}\right)^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\frac{h}{2}}{h}.\sin\frac{h}{2}\lim_{h\to 0}\left(-2.\frac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{h\to 0}\frac{\sinh}{h} = 1$$

olduğundan

$$(\sin x)' = \cos x$$

bulunur.

2) $f(x) = \cos x$ şeklinde tanımlanan $f: R \to R$ fonksiyonu için

$$(\cos x)' = -\sin x$$

dir. Bunun ispatını bir alıştırma olarak okuyucuya bırakıyoruz.

3) $f(x) = \tan x$ fonksiyonunun türevini bulalım.

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'.\cos x - (\cos x)'.\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= 1 + \tan^2 x$$

olur. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$ olduğundan

$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x$$

olur. Bu türev, $k \in Z$ olmak üzere $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ noktalarında vardır.

4) $f(x) = \cot x$ fonksiyonunun türevinin $x \neq k\pi$ için

$$(\cot x)' = -(1+\cot^2 x) = -\csc^2 x$$

olacağını bir alıştırma olarak okuyucuya bırakıyoruz.

5) $f(x) = \sec x$ fonksiyonunun türevini bulalım.

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{0.\cos x - (-\sin x).1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\cos x} = \tan x.\sec x$$

olur. Şu halde

$$(\sec x)' = \sec x.\tan x$$

dır. Bu türev $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ noktalarında vardır.

6) $f(x) = \csc x$ fonksiyonu için

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

olduğu yukarıdakine benzer olarak kolayca gösterilebilir. Bu türev $k \in Z$ olmak üzere $x \neq k\pi$ noktalarında vardır.

ÖRNEK : $y = f(x) = \sin ax$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm : $ax = u$ denirse $y = \sin u$ olur. Zincir kuralından

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = (\cos u)a = a\cos ax$$

bulunur. Genel olarak, u fonksiyonu x değişkeninin bir fonksiyonu ise

$$(\sin u)' = (\cos u)u'$$
$$(\cos u)' = (-\sin u)u'$$
$$(\tan u)' = (1+\tan^2 u)u'$$
$$(\cot u)' = -(1+\cot^2 u)u'$$
$$(\sec u)' = (\sec u \tan u)u'$$
$$(\csc u)' = -(\csc u \cot u)u'$$

olur.

ÖRNEK : $y = \sin 3x + \cos(x^2+1)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm :

$$y' = (\cos 3x)(3x)' - \sin(x^2+1)(x^2+1)'$$

$$= 3\cos 3x - 2x\sin(x^2+1)$$

olur.

ÖRNEK : $y = \tan^3 x + \sin(3x^2)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm : $y' = 3\tan^2 x(\tan x)' + \cos(3x^2)(3x^2)'$

$= 3\tan^2 x\,(1+\tan^2 x) + 6x\cos(3x^2)$

olur.

ÖRNEK : $y = (\tan\sqrt{x})^5$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm : $y' = 5(\tan\sqrt{x})^4(\tan\sqrt{x})'$

$= 5(\tan\sqrt{x})^4(1+\tan^2\sqrt{x})(\sqrt{x})'$

$= 5(\tan\sqrt{x})^4(1+\tan^2\sqrt{x})\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

olur.

ÖRNEK : $f(x) = (\sec 6x)^{3/2}$ için $f'(\pi)$ türevini hesaplayınız.

Çözüm : $f'(x) = \dfrac{3}{2}(\sec 6x)^{1/2}\sec 6x\ \tan 6x.6 = 9(\sec 6x)^{3/2}\tan 6x$

olduğundan

$$f'(\pi) = 9(\sec 6\pi)^{3/2}\tan 6\pi = 0$$

bulunur.

3.5 TERS TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

Ters fonksiyonun türevi ile esas fonksiyonun türevi arasında

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$$

bağıntısının olduğunu görmüştük. Bundan yararlanarak trigonometrik fonksiyonların terslerinin türevlerini hesaplayacağız.

1) $f(x) = \arcsin x$ eşitliği ile tanımlanan $f: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ fonksiyonunun türevini bulalım.

Bu fonksiyon, $g(y) = \sin y$ şeklinde tanımlanan $g: \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ fonksiyonunun ters fonksiyonu, yani $y = \arcsin x \Leftrightarrow \sin y = x$ olduğundan

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

bulunur. Bu ifade $|x| < 1$ için tanımlı olduğundan

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (|x| < 1)$$

olur.

2) $f(x) = \arccos x$ fonksiyonu için

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (|x| < 1)$$

olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

3) $f(x) = \arctan x$ şeklinde tanımlanan $f: R \to (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ fonksiyonu $g: (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to R$ fonksiyonunun ters fonksiyonlarıdır. Dolayısıyla $y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x$ dir. Buna göre

$$(\arctan x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

olur. Şu halde

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (-\infty < x < \infty)$$

yazılabilir. Benzer şekilde

$$(arc\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad (-\infty < x < \infty)$$

olduğu gösterilebilir.

$f(x) = \text{arcsec}\,x$ şeklinde tanımlanan $f: R\setminus(-1,1) \to [0,\pi]$ fonksiyonu $g: [0,\pi] \to R\setminus(-1,1) \leftrightarrow g(y) = \sec y$ fonksiyonunun tersi olduğundan

$$(arc\sec x)' = \frac{1}{(\sec y)'} = \frac{1}{\sec y\tan y}$$

bulunur. $\tan y = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1} = \pm\sqrt{x^2-1}$ olduğundan

$$(arc\sec x)' = \frac{1}{\pm x\sqrt{x^2-1}}$$

bulunur. Bu ifade $x < -1$ ve $x > 1$ için tanımlıdır. $x < -1$ için $\frac{\pi}{2} < y < \pi$ ve dolayısıyla $\tan y < 0$ olacağından (–) işareti alınmalıdır. $x > 1$ için $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ve dolayısıyla $\tan y > 0$ olacağından (+) işareti alınmalıdır. Buna göre

$$(arc\sec x)' \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad (|x| > 1)$$

olur.

Benzer şekilde

$$(arc\csc x)' = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}, \quad (|x| > 1)$$

olduğu gösterilebilir.

ÖRNEK : $y = \text{arcsec}\, e^x$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm : $y' = \dfrac{1}{|e^x|\sqrt{e^{2x}-1}}(e^x)' = \dfrac{e^x}{|e^x|\sqrt{e^{2x}-1}}$

olur. Her $x \in R$ için $e^x > 0$ olduğundan

$$y' = \frac{e^x}{e^x\sqrt{e^{2x}-1}} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

bulunur.

ÖRNEK : $f(x) = \arctan\dfrac{1}{x}$ için $f'(1)$ türevini hesaplayınız.

Çözüm : $f'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}} = -\dfrac{1}{1+x^2}$

olacağından $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$ dir.

ÖRNEK : $f(x) = x\arccos x - \sqrt{1-x^2}$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = 1.\arccos x - x\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}$

$= \arccos x$

olur.

ÖRNEK : $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\dfrac{x}{a}$ fonksiyonunun türevini bulunuz. (a bir sabit)

Çözüm : $y' = \sqrt{a^2-x^2} - \dfrac{2x.x}{2\sqrt{a^2-x^2}} + a^2\dfrac{\dfrac{1}{a}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}}$

$= \sqrt{a^2-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

$= \dfrac{2(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = 2\sqrt{a^2-x^2}$

bulunur.

ÖRNEK :

$f(x) = \left(x-\dfrac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x-x^2}$ için $f'(1)$ türevini hesaplayınız.

Çözüm : $f'(x) = 1.\arcsin\sqrt{x} + \left(x-\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{1-x}} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}}$

$= \arcsin\sqrt{x} + \dfrac{2x-1}{4\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + \dfrac{1-2x}{4\sqrt{x-x^2}}$

$= \arcsin\sqrt{x} + \dfrac{2x-1}{4\sqrt{x-x^2}} + \dfrac{1-2x}{4\sqrt{x-x^2}} = \arcsin\sqrt{x}$

olduğundan $f'(1) = \arcsin 1 = \dfrac{\pi}{2}$ olur.

ÖRNEK :

$f(x) = \sqrt{x^2-1} - \text{arcsec}\, x$ için $f'(\sqrt{2})$ ve $f'(-\sqrt{2})$ türevlerini hesaplayınız.

Çözüm :

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

olacağından

$$f'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-1}} - \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2-1}} = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ve

$$f'(-\sqrt{2}) = \frac{-\sqrt{2}}{1} - \frac{1}{\sqrt{2}.1} = \frac{-3}{\sqrt{2}}$$

bulunur.

1. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

(a) $y = 3\sin x + 4\cos x$

(b) $y = \sin x \cos x$

(c) $y = \sin^2 x + \sin(x^2)$

(ç) $y = \tan x \sec x$

(d) $y = -3x^2 + 4\sec x$

(e) $y = \cot x \csc x$

(f) $y = \sec x \csc x$

(g) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

(h) $y = \cos(\sin x)$

(ı) $y = \sqrt{x}\,\sec\sqrt{x}$

(i) $y = \dfrac{\sin x}{x} + \sin^2\sqrt{x}$

(j) $y = \sin x \cos^2 x$

(k) $y = \cos 2x \sin 3x$

(l) $y = \sin^2(x^2) + \sqrt{x}\,\sin\sqrt{x}$

(m) $y = \sec(\sin x) + \sin(\sec x)$

(n) $y = \dfrac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x$

(o) $y = \dfrac{1}{15}\cos^3 x\,(3\cos^2 x - 5)$

(ö) $y = \dfrac{(\tan^2 x - 1)(\tan^4 x + 10\tan^2 x + 1)}{3\tan^3 x}$

(p) $y = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x\sin x + \cos x}$

2. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı türevlerini bulunuz.

(a) $f(x) = (3x - \sin x)(x^2 + \cos x)$, $f'(0)$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$, $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

(c) $h(x) = \sqrt{x}\,\sec\sqrt{x}$, $h'(0)$

(d) $k(x) = (\tan x)^7 + \tan 7x$, $k'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

3. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

(a) $y = 5\arctan(3x)$

(b) $y = \arccos(x^2)$

(c) $y = \dfrac{1}{3}\arctan\dfrac{x}{3}$

(d) $y = \operatorname{arccsc}(1 + x^2)$

(e) $y = \operatorname{arccsc}\sqrt{x} + \operatorname{arcsec}\sqrt{x}$

(f) $y = \operatorname{arccot}\sqrt{x - 1}$

(g) $y = x\sqrt{1 - x^2} - \arccos x$

(h) $y = \sqrt{x^2 - 1} - \operatorname{arcsec} x$

(ı) $y = \arctan x - \operatorname{arccot}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(i) $y = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$

(j) $y = \arcsin(x^{100})$

(k) $y = \arctan(e^x)$

(l) $y = \operatorname{arcsec}(x^2)$

(m) $y = \arcsin(\tan x)$

(n) $y = x\arctan x + \arctan\sqrt{x}$

(o) $y = \arcsin\left(\dfrac{1}{x}\right) + \arccos x$

(ö) $y = \operatorname{arccot}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

(p) $y = (\arcsin\sqrt{x}\,)^2$

(r) $y = \arctan e^x + \operatorname{arccot} e^{-x}$

(s) $y = \sin(\arctan x) + \tan(\arcsin x)$

(ş) $y = \dfrac{1}{2}\left[(x - 1)\sqrt{2x - x^2} + \arcsin(x - 1)\right]$

4. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı türevlerini bulunuz.

(a) $f(x) = [\arcsin(2x^2)]$, $f'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(b) $y = \dfrac{1}{3}\arcsin\left(\dfrac{5\sin x + 4}{5 + 4\sin x}\right)$, $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$

(c) $y = 2\arctan\sqrt{\dfrac{2x + 1}{3}}$, $f'(4)$

(ç) $y = \dfrac{1}{a}\arcsin ax$, $f'(0)$

3.6 LOGARİTMA FONKSİYONUNUN TÜREVİ

$f(x) = \log_a x$ şeklinde tanımlanan $f: R^+ \to R$ fonksiyonunun türevini bulalım.

$$(\log_a x)' = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x + h) - \log_a x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}$$

olur. $\dfrac{h}{x} = k$ dersek $h \to 0$ için $k \to 0$ olacağından

$$(\log_a x)' = \lim_{k \to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a(1 + k)}{k} = \frac{1}{x} \lim_{k \to 0} \log_a (1 + k)^{\frac{1}{k}}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \lim_{r \to \infty} \log_a \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r \qquad \left(k = \frac{1}{r}\right)$$

olur.

$$\lim_{r \to \infty} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r = e$$

olduğundan

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$$

bulunur. Özel olarak $a = e$ alınırsa

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

olur.

ÖRNEK : $f(x) = \log_3(5x^2 + 1)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm : $t = 5x^2 + 1$ denirse $f(t) = \log_3 t$ olur.

$$f'(x) = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \log_3 e . (10x) = \frac{10x}{5x^2 + 1} \log_3 e$$

bulunur. Genel olarak

$$[\log_a u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)} \log_a e$$

olur.

ÖRNEK : $f(x) = \ln(\cos x)$ için $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ türevini hesaplayınız.

Çözüm : $f'(x) = \dfrac{(\cos x)'}{\cos x} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$ olduğundan

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

bulunur.

$a \in R^+ \setminus \{1\}$ olmak üzere $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan $f : R \to R^+$ fonksiyonu logaritma fonksiyonunun ters fonksiyonu olduğundan $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$ dir. Bu nedenle

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e} = y.\log_e a$$

olur. $y = a^x$ olduğundan

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

bulunur. Özel olarak $a = e$ alınırsa

$$(e^x)' = e^x$$

olur.

ÖRNEK : $y = e^{3x^2+6x}$ için y' türevini hesaplayınız.

Çözüm : $u = 3x^2 + 6x$ denirse $y = e^u$ olur.

Zincir kuralından

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = e^u.(6x+6)$$
$$= e^{3x^2+6x}(6x+6)$$

bulunur. Genel olarak

$$[a^{u(x)}]' = a^{u(x)}u'(x)\ln a$$

ve

$$[e^{u(x)}]' = e^{u(x)}u'(x)$$

olur.

ÖRNEK : $f(x) = 2^{\cos(5x)}$ için $f'(0)$ türevini hesaplayınız.

Çözüm : $f'(x) = 2^{\cos 5x}.(\cos 5x)'.\ln 2 = 2^{\cos 5x}(-5\sin 5x)\ln 2$

olacağından

$$f'(0) = -5.2^{\cos 0}\sin 0 \ln 2 = 0$$

bulunur.

$y = [f(x)]^{g(x)}$ şeklindeki bir ifadenin türevini almak için önce her iki tarafın logaritması alınıp

$$\ln y = g(x).\ln f(x)$$

bulunur. Sonra her iki tarafın türevi alınır.

$$\frac{y'}{y} = g'(x).\ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)}.g(x)$$

olur. Buradan

$$y' = y\left[g'(x).\ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)}g(x)\right]$$
$$= [f(x)]^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x) + \frac{f'(x)}{f(x)}g(x)\right]$$

olur.

ÖRNEK : $y = (1+x^2)^x$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm : $\ln y = \ln(1+x^2)^x = x\ln(1+x^2)$ olur. Her iki tarafın türevi alınırsa

$$\frac{y'}{y} = 1.\ln(1+x^2) + \frac{2x}{1+x^2}x$$
$$= \ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}$$

bulunur. Buradan

$$y' = y\left[\ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}\right] = (1+x^2)^x\left[\ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}\right]$$

olur.

ÖRNEK : $f(x) = x^{\sin x}$ için $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ türevini hesaplayınız.

Çözüm : $y = x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x \ln x + (\sin x)\frac{1}{x} \Rightarrow$

$$y' = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

olur. $x = \frac{\pi}{2}$ yazılırsa

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\sin\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}.\frac{2}{\pi} = 1$$

bulunur.

1. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

(a) $y = e^{4x}$ (b) $y = e^{-\sqrt{x}}$

(c) $y = e^{(x^2)}$ (ç) $y = (x + 1)\, e^{-x}$

(d) $y = e^{\cos x}$ (e) $y = e^{-\ln x}$

(f) $y = 3^{\tan x}$ (g) $y = 2^{1/x}$

(h) $y = 3^{5x-2}$ (ı) $y = a^x \sin bx$

(i) $y = \tan e^x$ (j) $y = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$

2. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

(a) $y = \ln(3x - 1)$ (b) $y = \ln(1 - x^x)$

(c) $y = \ln\sqrt{2x+3}$ (ç) $y = \ln(1 + x)^3$

(d) $y = \ln(\sin^2 x)$ (e) $y = \cos(\ln x)$

(f) $y = (\ln x)^3$ (g) $y = \dfrac{1}{\ln x}$

(h) $y = \ln(\ln x)$ (ı) $y = \ln(x\sqrt{x^2+1})$

(i) $y = \ln(2\sin x)$ (j) $y = \sin(\ln 2x)$

(k) $y = \log_5 e^x$ (l) $y = x\log_4 \dfrac{1}{x}$

(m) $y = \log_3(3x^2 + 1)$ (n) $y = x\log_2 x$

(o) $y = \log_3(x^2 + 1)$ (ö) $y = \log_{10}\sqrt{x+1}$

(p) $y = x^{3/2}\ln(x+1)$ (r) $y = \ln(\cos x)$

(s) $y = \sqrt{x}\,[\cos(\ln x)]^2$ (ş) $y = \log_2 x \log_3 x$

3. Aşağıdaki ifadeler için y' türevini hesaplayınız.

(a) $y = x^x$ (b) $y = x^{\sin x}$

(c) $y = x^{2/x}$ (ç) $y = (\cos x)^{\cos x}$

(d) $y = (\ln x)^{\ln x}$ (e) $y = (\cos x)^{\pi x^2}$

(f) $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ (g) $y = x^{\ln x}$

(h) $y = (\sqrt{x}\,)^x$ (ı) $y = (1 - x)^x$

4. Aşağıdaki ifadeler için y' türevini hesaplayınız.

(a) $y = \log_4 x + \log_4 x^2$

(b) $y = \log_{25} e^x - \log_5 \sqrt{x}$

(c) $y = e^x \ln x - x$

(d) $y = \ln(e^{-x} + x e^{-x})$

(e) $y = \dfrac{1}{\sin^2 x} + \ln(\tan x)$

(f) $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}\,)$

(g) $y = x\arctan x - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2)$

(h) $y = \ln(\sqrt{1+x} + \sqrt{x} - \sqrt{x^2+1}\,)$

(ı) $y = \arctan x + \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(i) $y = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1 + \sqrt{x}\,)$

(j) $y = \ln(1 + x + \sqrt{2x + x^2}\,)$

(k) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4} - 2\ln(x + \sqrt{x^2 - 4}\,)$

(l) $y = \ln(x^2 - 1) + \ln\dfrac{x-1}{x+1}$

(n) $y = \dfrac{1}{3}\ln(1+x) - \dfrac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$

(o) $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\dfrac{\tan\frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3}}{\tan\frac{x}{2} - 2 + \sqrt{3}}\right)$

5. Logaritma özelliklerinden yararlanarak, aşağıdaki ifadeleri basit ifadelerin logaritmaları haline getirip türevlerini hesaplayınız.

(a) $y = \ln\left[(2x+1)^3(x^2-4)^4\right]$

(b $y = \ln\sqrt{\dfrac{4 - x^2}{9 + x^2}}$

(c) $y = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

6. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı denklemleri sağladığını gösteriniz.

(a) $y = x\,e^{2x}$, $xy' = y(1 + x)$

(b) $y = xe^{-x^2/2}$, $xy' = y(1 - x^2)$

HİPERBOLİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

Bilindiği gibi, hiperbolik fonksiyonlar

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sec}hx = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csc}hx = \frac{1}{\sinh x}$$

biçiminde tanımlanmıştı.

Şimdi bu fonksiyonların türevlerini hesaplayalım.

1) $f(x) = \cosh x$ fonksiyonunun türevi:

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

olacağından

$$(\cosh x)' = \sinh x$$

dir.

2) $f(x) = \sinh x$ fonksiyonunun türevi :

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

olacağından

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

bulunur.

3) $f(x) = \tanh x$ fonksiyonunun türevi :

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh x\cosh x - \sinh x\sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sec}h^2 x$$

olduğundan

$$(\tanh x)' = \operatorname{sec}h^2 x$$

bulunur.

4. Diğer hiperbolik fonksiyonların türevleri benzer şekilde hesaplanarak

$$(\coth x)' = -\operatorname{csc}h^2 x \qquad (\operatorname{sec}hx)' = -\operatorname{sec}hx\tanh x$$

$$(\operatorname{csc}hx)' = -\operatorname{csh}x\coth x$$

bağıntıları elde edilir.

ÖRNEK : $y = \sinh u(x)$ fonksiyonunun türevini bulunuz.

Çözüm : $u(x) = t$ denirse $y = \sinh t$ olur. Zincir kuralından

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (\cosh t)\, u'(x)$$

olur. $t = u(x)$ yazılırsa

$$[\sinh u(x)]' = \cosh u(x) . u'(x)$$

bağıntısı bulunur.

ÖRNEK : $y = \cosh(\ln x)$ için y' türevini bulunuz.

Çözüm :
$$y' = \sinh(\ln x)\,(\ln x)' = \frac{1}{x}\sinh(\ln x)$$
$$= \frac{1}{x}\,\frac{e^{\ln x} - e^{-\ln x}}{2} = \frac{1}{2x}\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 - 1}{2x^2}$$

bulunur.

ÖRNEK : $f(x) = \arctan(\tanh x)$ için $f'(0)$ türevini hesaplayınız.

Çözüm : $f'(x) = \dfrac{(\tanh x)'}{1 + \tanh^2 x} = \dfrac{\sec h^2 x}{1 + \tanh^2 x}$

olacağından

$$f'(0) = \frac{\sec h^2 0}{1 + \tanh^2 x} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

bulunur.

ÖRNEK : $f(x) = \ln(\sinh 3x) - \ln(\cosh 3x)$ için $f'\left(\frac{\ln 2}{3}\right)$ türevini hesaplayınız.

Çözüm :
$$f'(x) = \frac{(\sinh 3x)'}{\sinh 3x} - \frac{(\cosh 3x)'}{\cosh 3x} = \frac{3\left(\cos^2 h3x - \sinh^2 3x\right)}{\sinh 3x \cosh 3x}$$
$$= \frac{3}{\sinh 3x \cosh 3x}$$

olacağından

$$f'\left(\frac{\ln 2}{3}\right) = \frac{3}{\frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{2} \cdot \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2}} = \frac{12}{\left(2 - \frac{1}{2}\right)\left(2 + \frac{1}{2}\right)} = \frac{16}{5}$$

bulunur.

3.10 TERS HİPERBOLİK FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$f(x) = \text{Arccosh}x$ in türevini hesaplayalım.

$$\text{arccosh}x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

olduğunu göstermiştik. Buna göre

$$(\text{arccos}\,hx)' = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)'}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$$
$$= \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 - 1}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

olur. Şu halde $x > 1$ için

$$(\text{arccos}\,hx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

olacaktır. Benzer şekilde her x için,

$$(\text{arcsin}\,hx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad ,$$

$|x| < 1$ için

$$(\text{arctan}\,hx)' = \frac{1}{x^2 - 1} \quad ,$$

$x > 1$ için

$$(arc\,\coth x)' = \frac{1}{1 - x^2}$$

$0 < x < 1$ için

$$(arc\,\sec hx)' = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

ve $x > 0$ için

$$(arc\,\csc hx)' = -\frac{1}{x\sqrt{1 + x^2}}$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

ÖRNEK : $y = \text{arcsin}h\,(\tan x)$ için y' türevini bulunuz.

Çözüm :
$$y' = \frac{(\tan x)'}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \frac{1 + \tan^2 x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \sqrt{1 + \tan^2 x}$$
$$= \sqrt{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos x|}$$

bulunur.

ÖRNEK: $f(x) = x^2\text{arccsc}(x^2)$ için $f'(1)$ türevini hesaplayınız.

Çözüm : $f'(x) = (2x)\text{arccsc}(x^2) + x^2 \dfrac{-1}{x^2\sqrt{1+x^4}} 2x$

$$= 2x\left[\text{arc csc}(x^2) - \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\right]$$

olduğundan

$$f'(1) = 2\left(\text{arc csc}\, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

dir. Şimdi arccsc1 sayısını hesaplayalım.

$$\text{arccsc}x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$$

olduğundan

$$\text{arccsc}1 = \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1}\right) = \ln(1+\sqrt{2})$$

dir. Buna göre

$$f'(1) = 2\left[\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \ln(3+2\sqrt{2}) - \sqrt{2}$$

olur.

ÖRNEK : $f(x) = (1-x)\,\text{arctanh}x$ için $f'(0)$ türevini hesaplayınız.

Çözüm : $f'(x) = -\text{arctanh}x + (1-x)\dfrac{1}{x^2-1}$

$$= -\text{arctanh}x - \frac{1}{x+1}$$

olduğundan

$$f'(0) = -\text{arctan}h0 - \frac{1}{0+1} = 0 - 1 = -1$$

bulunur.

3.11 PARAMETRİK DENKLEMLERİ VERİLEN FONKSİYONLARIN TÜREVİ

$f : A \subset R \to R$ fonksiyonu $y = f(x)$ bağıntısıyla verildiği gibi

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$$

biçiminde de verilebilir. Burada t sayısına parametre adı verilir. Bu iki bağıntı arasında t parametresi yok edilirse x ile y arasında bir bağıntı bulunabilir. Bu kesimde fonksiyonun parametrik olarak verilmesi halinde $\dfrac{dy}{dx}$ türevinin nasıl bulunabileceğini göstereceğiz.

$u(t)$ ve $v(t)$, t nin türevlenebilen fonksiyonları olsun.

$$\Delta x = u(t+\Delta t) - u(t)$$

$$\Delta y = v(t+\Delta t) - v(t)$$

olduğundan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{u(t+\Delta t) - u(t)} = \frac{\dfrac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}}{\dfrac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}}$$

yazılabilir. u ile v türevli olduğundan süreklidir.

Dolayısıyla $\Delta t \to 0 \Leftrightarrow \Delta x \to 0$ dır. Buna göre

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\dfrac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}}{\dfrac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t}} = \frac{\dfrac{dv}{dt}}{\dfrac{du}{dt}}$$

bulunur. Buna göre

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$

yazılabilir. $\dfrac{dy}{dt} = \dot{y}$, $\dfrac{dx}{dt} = \dot{x}$ ile gösterilirse, yukarıdaki bağıntı, kısaca

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

biçiminde yazılabilir.

ÖRNEK : Parametrik denklemi $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ olan fonksiyonun türevini bulunuz. Bu fonksiyonun $t = \frac{\pi}{2}$ noktasındaki değerini hesaplayınız.

Çözüm : $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\sin t}{2(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$

bulunur. $t = \frac{\pi}{2}$ için

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1 - \cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1} = 1$$

olur.

3.12 KAPALI BİÇİMDE TANIMLANAN FONKSİYONLARIN TÜREVİ

Bilindiği gibi $F(x,y) = 0$ biçimindeki bir bağıntıyla tanımlanan fonksiyonlara, kapalı biçimde verilmiş bir fonksiyon veya kısaca, bir kapalı fonksiyon denir. Böyle bir fonksiyonun türevini bulmak için $F(x,y) = 0$ eşitliğinde her iki tarafın x'e göre türevi alınır, bulunan eşitlikten y' çekilir.

ÖRNEK : $x^2 + y^2 - 3xy + 2x - 4y + 5 = 0$ eşitliği ile tanımlanan fonksiyonun (bu bağıntı bir veya birden fazla fonksiyon tanımlayabilir) türevini hesaplayınız.

Çözüm : Verilen eşitlikte her iki tarafın türevi alınırsa

$$2x + 2yy' - 3(y + xy') + 2 - 4y' = 0 \Rightarrow$$

$$(2y - 3x - 4)\, y' + 2x - 3y + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{3y - 2x - 2}{2y - 3x - 4}$$

bulunur.

ÖRNEK : $4xy^2 + x^3 + 2y - 4 = 0$ eşitliği ile tanımlanan fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki türevini hesaplayınız.

Çözüm : $x = 0$ için $2y - 4 = 0 \Rightarrow y = 2$ olur.

$$4y^2 + 8xy' + 3x^2 + 2y' = 0$$

eşitliğinde $x = 0,\ y = 2$ konursa

$$16 + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -8$$

bulunur.

3.13 YÜKSEK MERTEBEDEN TÜREVLER

$y = f(x)$ fonksiyonu verildiğinde

$$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

türevine y nin türevi veya y nin birinci türevi denir. Eğer $y' = f'(x)$ fonksiyonu da türevlenebilirse

$$(y')' = y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = f^{(2)}(x)$$

türevine y nin ikinci türevi denir. (y'') ikinci türevi de türevlenebilir ise

$$\frac{d}{dx}(y'') = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3} = y''' = y^{(3)}$$

türevine y nin üçüncü mertebeden türevi denir. Daha yüksek mertebeden türevler de benzer şekilde tanımlanır. Genel olarak

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

dir. Yani her mertebeden türev, bir önceki türevin türevidir.

ÖRNEK : $y = 6x^5 - 8x^4 + 2x^3 - 3x + 5$ fonksiyonunun üçüncü mertebeden türevini bulunuz.

Çözüm :

$$y' = 30x^4 - 32x^3 + 6x^2 - 3$$

$$y'' = (y')' = 120x^3 - 96x^2 + 12x$$

$$y''' = (y'')' = 360x^2 - 192x + 12$$

olur.

ÖRNEK : $f(x) = 3x^6 - 4x^3 + 2x^2 - 1$ için $f^{(4)}(1)$ türevini hesaplayınız.

Çözüm :

$$f'(x) = 18x^5 - 12x^2 + 4x$$

$$f''(x) = 90x^4 - 24x + 4$$

$$f'''(x) = 360x^3 - 24$$

$$f^{(4)}(x) = 1080x^2$$

$$f^{(4)}(1) = 1080$$

olur.

ÖRNEK : $f(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun n. türevini bulunuz. Bu türevin $x = 1$ noktasındaki değerini hesaplayınız.

Çözüm :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = (-1)^1 \frac{1!}{x^{1+1}}$$

$$f''(x) = \frac{2x}{x^4} = (-1)^2 \frac{2!}{x^{2+1}}$$

$$f'''(x) = \frac{1.2.3x^2}{x^6} = -\frac{1.2.3}{x^4} = (-1)^3 \frac{3!}{x^{3+1}}$$

olur. Buna göre

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

olacaktır. $x = 1$ için

$$f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$$

bulunur.

ÖRNEK : $x^3 + 2y^2 - 3xy - 4y + 2 = 0$ denklemiyle tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonunun ikinci türevinin $x = 0$ noktasındaki değerini hesaplayınız.

Çözüm : x'e göre türev alınırsa

$$3x^2 + 4yy' - 3(y + xy') - 4y' = 0 \Rightarrow$$

$$(4y - 3x - 4)y' = 3y - 3x^2 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{3y - 3x^2}{4y - 3x - 4}$$

bulunur. $x = 0$ için

$$2y^2 - 4y + 2 = 0 \Rightarrow 2(y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1$$

bulunur. $x = 0,\ y = 1$ için

$$y' = \frac{3y - 3x^2}{4y - 3x - 4}$$

türevi tanımlı olmadığından y' mevcut değildir. Dolayısıyla y'' ve diğer yüksek mertebeden türevler yoktur.

ÖRNEK : $x^3 + y^3 + 3xy + 3y^2 + 6x + 6y = 0$ eşitliğiyle tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasındaki ikinci türevini hesaplayınız.

Çözüm : $x = 1$ için

$$1 + y^3 + 3y + 3y^2 + 6 + 6y = 0 \Rightarrow$$

$$(y+1)^3 + 6(y+1) = 0 \Rightarrow (y+1)\left[(y+1)^2 + 6\right] = 0 \Rightarrow$$

$$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$$

bulunur. x'e göre türev alınırsa

$$3x^2 + 3y^2 y' + 3y + 3xy' + 6yy' + 6 + 6y' = 0 \Rightarrow$$

$$(3y^2 + 3x + 6y + 6)\, y' = -(3x^2 + 3y + 6) \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{3(x^2 + y + 2)}{3(y^2 + x + 2y + 2)} = -\frac{x^2 + y + 2}{y^2 + x + 2y + 2}$$

bulunur. $x = 1,\ y = -1$ için

$$y' = -\frac{1 - 1 + 2}{1 + 1 - 2 + 2} = \frac{2}{2} = 1$$

olur.

$$y'' = (y')' = -\frac{(2x + y')(y^2 + x + 2y + 2) - (2yy' + 1 + 2y')(x^2 + y + 2)}{(y^2 + x + 2y + 1)^2}$$

eşitliğinde $x = 1,\ y = -1$ ve $y' = 1$ yazılırsa

$$y'' = -\frac{(2+1)(1+1-2+2) - (-2+1+2)(1-1+2)}{(1+1-2+2)^2}$$

$$= -\frac{6-2}{4} = -\frac{4}{4} = -1$$

bulunur.

ÖRNEK : u ile v türevlenebilen fonksiyonlar olmak üzere, $y = f(x)$ fonksiyonu

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}$$

biçiminde parametrik olarak veriliyor.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x})^3}$$

olacağını gösteriniz. (Burada $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \dfrac{d^2 x}{dt^2}$ dir.)

Çözüm : $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \dfrac{\dot y}{\dot x}$

olduğundan

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\dfrac{dy'}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot y}{\dot x}\right)}{\dot x} = \frac{\dfrac{\ddot y\,\dot x - \ddot x\,\dot y}{(\dot x)^2}}{\dot x} = \frac{\dot x\,\ddot y - \ddot x\,\dot y}{(\dot x)^3}$$

bulunur.

ÖRNEK : $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ olduğuna göre, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ türevinin $t = \dfrac{\pi}{4}$ noktasındaki değerini bulunuz.

Çözüm : $\dot x = -4\sin t,\ \ddot x = -4\cos t,\ \dot y = 3\cos t,\ \ddot y = -3\sin t$ olacağından

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot x\,\ddot y - \ddot x\,\dot y}{(\dot x)^3} = \frac{12\sin^2 t - 12\cos^2 t}{-64\sin^3 t} = \frac{-12(\cos^2 t - \sin^2 t)}{-64\sin^3 t}$$

$$= \frac{3}{16}\cdot\frac{\cos 2t}{\sin^3 t}$$

olur. $t = \dfrac{\pi}{4}$ için

$$y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{16}\cdot\frac{\cos\dfrac{\pi}{2}}{\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^3} = 0$$

bulunur.

ÖRNEK : $f(x) = x^4 - 6x^3 - 24x^2 + 5x - 7$ fonksiyonu veriliyor. $f''(x)$ türevinin işaretini inceleyiniz.

Çözüm : $y' = f'(x) = 4x^3 - 18x^2 - 48x + 5$

$y'' = f''(x) = 12x^2 - 36x - 48 = 12(x^2 - 3x - 4)$

olur.

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 4$ olduğundan, işaret tablosu

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$f''(x)$		+	0	−	0	+	

biçiminde olacaktır. Buna göre $(-\infty, -1)$ ve $(4, +\infty)$ aralıklarında $f''(x) > 0$, $(-1, 4)$ aralığında $f''(x) < 0$ dır.

1. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini bulunuz.

(a) $y = \sin h\sqrt{x}$

(b) $y = \cos h(3x - 2)$

(c) $y = \sec h\, e^{2x}$

(d) $y = \ln(\sin h3x)$

(e) $y = e^{\operatorname{csch} x}$

(f) $y = \cos h(\ln x)$

(g) $y = \sin(\sin hx)$

(h) $y = \arctan(\tan hx)$

(ı) $y = \sin h(x^4)$

(i) $y = \sin h^4$

(j) $y = \cot h^3\, 4x$

(k) $y = x^2 \tan h\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(l) $y = \cos h^2\, 5x - \sin h^2 5x$

(m) $y = \sec h^2 x + \tan h^2 x$

(n) $y = x \sin hx - \cos hx$

2. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

(a) $y = \arcsin h2x$

(b) $y = \arccos h(\sec x)$

(c) $y = \arctan h(\cos x)$

(ç) $y = \operatorname{arcsec} h(\sin 2x)$

(d) $y = \arccos h(x^2)$

(e) $y = \arcsin h\sqrt{x - 1}$

(f) $y = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2 - 1} - \dfrac{1}{2}\arccos hx$

(g) $y = \sqrt{1 + x^2} - \arcsin h\left(\dfrac{1}{x}\right)$

(h) $y = 2\arccos h\left(\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 - 4}$

(ı) $y = \arccos h(x^2 + 1) + \arctan h\sqrt{x}$

(i) $y = \arcsin h(\ln x) + \ln(\arctan hx)$

3. Aşağıdaki bağıntılardan y' türevini bulunuz.

(a) $x^2 + y^2 = 4$

(b) $x^2 + y^2 - 3xy + x - y = 0$

(c) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$

(d) $x = y + \tan y$

(e) $x^3 + y^3 = 3xy$

4. Aşağıdaki denklemlerle tanımlanan $y = f(x)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerini, karşılarında yazılı parametreler için hesaplayınız.

(a) $\begin{cases} x = 2t^2 + 1 \\ y = 3t^3 + 2 \end{cases}$, $\quad t = 1$

(b) $\begin{cases} x = t\sin t \\ y = t\cos t \end{cases}$, $\quad t = \dfrac{\pi}{4}$

(c) $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \end{cases}$, $\quad t = 0$

(d) $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1 + t^3} \end{cases}$, $\quad t = 1$

5. Aşağıdaki eşitliklerle verilen fonksiyonların n. türevlerini bulunuz.

(a) $f(x) = \ln x$

(b) $f(x) = \sin x$

(c) $f(x) = \cos 3x$

(d) $f(x) = \sqrt{x}$

(e) $f(x) = \sin^2 x$

6. $f(x) = x^n$ için

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \dots\dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n$$

olduğunu gösteriniz.

1. Türev tanımından yararlanarak aşağıdaki fonksiyonların türelerini hesaplayınız.

(a) $f(x) = \cos 2x$

(b) $g(x) = x^2 - 3x$

2. Aşağıdaki türevleri hesaplayınız.

(a) $y=-\dfrac{15}{4(x-3)^4}-\dfrac{10}{3(x-3)^3}-\dfrac{1}{2(x-3)^2}$

(b) $y=\dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8}-\dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}$

(c) $y=\dfrac{(\tan^2 x-1)(\tan^4 x+10\tan^2 x+1)}{3\tan^3 x}$

(d) $y=\dfrac{1}{\sqrt{b}}\arcsin\left(x\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$

3. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı noktalarda türevli olmadıklarını gösteriniz.

(a) $f(x) = 3\,|x| + 2$, $x=0$

(b) $g(x) = \sqrt[5]{x^3}$, $x=0$

(c) $h(x) = \sqrt[3]{x-1}$, $x=1$

(d) $k(x) = |\ln x|$, $x=1$

4. Aşağıda verilen fonksiyonların karşılarında yazılı noktalardaki türevlerini hesaplayınız.

(a) $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{16}{x}$, $x=8$

(b) $g(x)=e^x(\cos x+\sin x)$, $x=0$

(c) $h(x)=\ln^6(\tan 3x)$, $x=\dfrac{3\pi}{4}$

5. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

(a) $f(x) = \arcsin(\tanh x)$

(b) $g(x) = (\cos x)^{\sin x}$

(c) $h(x) = x^{(x^x)}$

6. Aşağıdaki fonksiyonların n. türevini bulunuz.

(a) $y = \sin 5x \cos 2x$

(b) $y = \sin 3x \cos^2 x$

(c) $y = \ln(x^2 + x - 2)$

7. $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ fonksiyonu için

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\frac{n!\,c^{n-1}}{c(x+d)^{n+1}}(bc-ad)$$

olacağını gösteriniz.

8. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ için

$$f^{(n)}(0)=(-1)^n n!$$

olacağını gösteriniz.

9. $y = u(x)\,v(x)$ için

$$y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}(x)v^{(n-k)}(x)$$

olacağını gösteriniz. [Leibniz formülü]

10. Leibniz formülünden yararlanarak aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı türevlerini hesaplayınız.

(a) $g(x) = x^2\sin x$, $f^{(30)}(x)$

(b) $g(x) = e^x(x^2 + 3)$, $g^{(25)}(x)$

(c) $x = e^x\sin x$, $h^{(20)}(x)$

(ç) $k(x) = (\cos 3x)\ln x$ $k^{(30)}(x)$

(d) $l(x) = x^3\ln 2x$ $l^{(50)}(x)$

11. $y=x^n\,[a\cos(\ln x)+b\sin(\ln x)]$

fonksiyonunun

$$x^2y''+(1-2n)xy'+(1+n^2y)=0$$

denklemini sağladığını gösteriniz.

12. Aşağıdaki fonksiyonların ikinci mertebeden türevlerini hesaplayınız.

(a) $\begin{cases}x=e^t\cos t\\ y=e^t\sin t\end{cases}$

(b) $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$

13. $f(x)=x^2e^{-\frac{x}{a}}$ olsun.

$$f^{(n)}(0)=(-1)^n\frac{n(n-1)}{a^{n-2}}$$

olacağını gösteriniz.

14. $f(x)=e^{-x^2}$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $f^{(n)}(0)=-2(n-1)\,f^{(n-2)}(0)$

(b) $f^{(2m-1)}(0)=0$

(c) $f^{(2m)}(0)=(-2)^m(2m-1)(2m-3)...5.3.1$

15. $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ için

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}n\,, & n \text{ çift ise}\\ 0\,, & n \text{ tek ise}\end{cases}$$

olduğunu gösteriniz.

16. $f(x)=x^4\ln x$ fonksiyonunun 5. türevinin $\dfrac{4!}{x}$ olacağını gösteriniz.

17. Aşağıdaki fonksiyonların, $x = 0$ noktasında ikinci mertebeden türevli olup olmadıklarını araştırınız.

(a) $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \text{ ise}\\ 0, & x=0 \text{ ise}\end{cases}$

(b) $g(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \text{ ise}\\ 0, & x=0 \text{ ise}\end{cases}$

(c) $h(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \text{ ise}\\ 0, & x=0 \text{ ise}\end{cases}$

18. f, $a > 0$ noktasında türevli bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

limitini $f'(a)$ cinsinden yazınız.

19. $(x + y)^{a+b} = x^a y^b$ eğrisinin $xy' = y$ denklemini sağladığını gösteriniz.

20. Periyodik fonksiyonların türevinin de periyodik olacağını gösteriniz.

21. $\begin{cases}x=\ln t\\ y=t^\alpha\end{cases}$ için $\dfrac{d^n y}{dx^n}$ türevini hesaplayınız.



ISAAC NEWTON (1642 – 1727)

Newton 1642 yılının bir Noel gününde bir İngiliz çiftçi ailesinin çocuğu olarak dünyaya geldi. Babası, Newton doğmadan 3 ay önce ölmüştü. Erken doğum sonucu doğan Newton o kadar zayıf, o kadar çelimsizdi ki, çevresindeki herkes onun yaşayacağına inanmıyordu.

Newton, üç yaşında iken annesi ikinci kez evlendi. Onun bakımı anneannesine bırakıldı. Annesinin üç çocuğu daha oldu. Bu çocuklar kayda değer bir başarı gösteremediler.

Newton çocukluğunda da dinç, canlı ve kuvvetli değildi. Bu nedenle arkadaşlarının oynadığı zor oyunlara katılmazdı. Arkadaşlarıyla eğlenceli vakit geçirme yerine, eğlencelerini ve oyuncaklarını kendi yaratıyordu. Geceleri köylüleri korkutmak için kandilli uçurtmalar, su çarkları, güneş saatleri onun zekasını ortaya koyan buluşlardı.

Newton ürkek yapılı, sinirli ve tenkit edilmeye tahammülü olmayan bir insandı. Eserlerini dostlarının zoru ile bastırmıştır. Çalışmalarından birilerine itiraz gelecek diye ödü kopuyordu. Yerçekimi genel kanunun, bu nedenle yirmi yıl sonra 1687 yılında yayınlayabilmiştir.

Newton ilk öğrenimini yöredeki okullarda yaptı.

Newton'daki zekayı ilk keşfeden dayısı William olmuştur. Bu sıralar annesinin ikinci kocası da ölmüş, annesi Woolsthrope geri dönmüştü. Newton annesinin yanında kalıyordu. Annesi Newton'u, babasından kalan çiftliği yönetmesi için yanından ayırmak istemiyordu. Fakat dayı Williams annesini ikna ederek, Newton'un üniversiteye gitmesine razı etti. Newton 1661 yılında Cambridge'deki Trinity College'e girdi.

Newton'un matematik öğretmeni Isaac Barrow hem ilahiyatçı hem de meşhur bir matematikçiydi. Matematik öğrencisinin kendisinden çok ilerde olduğunu kabul ediyordu. Barrow, geometri derslerinde kendine özgü yöntemlerle, alanları hesaplamak, eğrilere üzerindeki noktalardan teğet çizmek için yollar gösteriyordu. İşte bu dersler Newton'u diferensiyel ve integral hesabı bulmaya ve bu sahada çalışmaya yönelten ilk adımlardır.

Newton, Cambridge Üniversitesine gitmeden önce Descartes analitik geometriyi, Kepler kendi adıyla anılan üç kanundan ikisini bulmuştu. Bu bilgiler de onun için bir temel oluşturmuştu.

Newton kendi adıyla anılan hareket kanunlarını bulmuş fakat yayımlamak için uzun süre beklemiştir.

Newton'un en önemli buluşu, diferensiyel ve integral hesabı bulmasıdır. Zaten Newton'u gelmiş geçmiş üç büyük matematikçiden biri yapan buluşu budur. Bu kavramlar neticesinde çok önemli kolaylıklar elde edilmiştir. Büyük fizik alimi P. Berkeley bu kavram için haklı olarak "Diferensiyel ve integral hesap her kapıyı açar. Bu öyle bir anahtardır ki onun sayesinde modern matematikçiler geometrinin ve sonuç olarak doğanın sırlarını keşfeder." demiştir.

Aynı yıllarda Leibnitz de aynı kavramlar üzerinde çalışıyordu. Bunlar buluşlarını birbirlerine katarak geliştirdiler. Birbirlerinin niteliklerini çok iyi biliyor ve taktir ediyorlardı. Ünlü kimselerin bir çoğunun hayatı zorluklar ve sıkıntılarla geçmiştir. Yaşadığı uzun yılları en mesut bir biçimde geçiren ve yaptıklarının sonuçlarını gören, takdir edilen, şan ve şöhretle alkışlanan tek matematikçi Newton'dur.

20 Mart 1727 de 85 yaşında öldü.

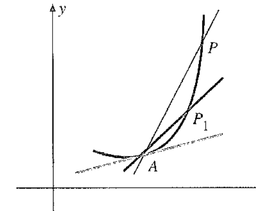
Bilim, yalnızca doğanın matematiksel davranışını ortaya koyan yasalardan oluşur.

I. NEWTON

4 TÜREVİN UYGULAMALARI

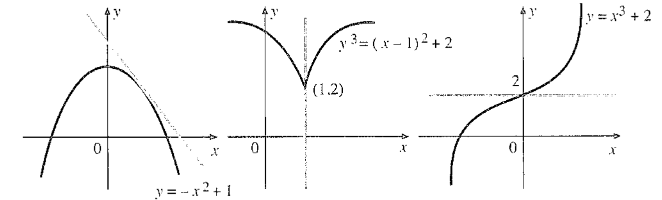
Türevin birçok alanda çeşitli uygulamaları vardır. Biz bu kesimde Matematik, Fizik, İktisat alanlarındaki bazı uygulamalarına yer vereceğiz.

4.1 TÜREVİN GEOMETRİK ANLAMI



$y = f(x)$ denklemi ile verilen sürekli bir f fonksiyonunun grafiği üzerinde bir A noktası alalım. Eğri üzerinde diğer bir hareketli nokta P olsun. P noktası A noktasına yaklaştığında AP kirişi konum değiştirir. P noktasının A ile çakışması durumunda AP kirişinin pozisyonuna, eğrinin A noktasındaki teğeti denir.

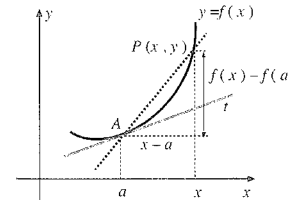
Aşağıdaki şekillerde bazı eğrilerin teğetleri çizilmiştir.



f fonksiyonu a noktasında türevli bir fonksiyon, $A(a,b)$ de fonksiyonun grafiği üzerinde bir sabit nokta olsun. Eğrinin A noktasındaki teğetine t diyelim. Eğri üzerinde değişken bir $P(x,y)$ noktası alındığında AP kirişinin eğimi

$$m_{AP} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

olacaktır.



P noktası eğri üzerinde A ya doğru hareket ettiğinde AP kirişi t teğetine yaklaşır. Şu halde x, a noktasına yaklaşırken AP kirişi t teğetine yaklaşır. x, a ile çakışırken AP kirişi de t teğeti ile çakışır. Buna göre teğetin eğimi olan m sayısı için

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

olur. Sağ taraf f nin a noktasındaki türevi olacağından

$$m = f'(a)$$

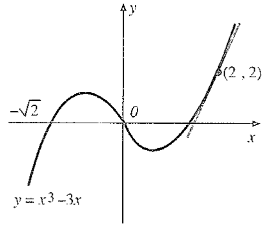
bulunur. Bir noktası ve eğimi bilinen doğrunun denklemi

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

olduğundan, teğetin denklemi

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

olur.



ÖRNEK : $f(x) = x^3 - 3x$ eğrisine $x = 2$ absisli noktasından çizilen teğetin denklemini bulunuz.

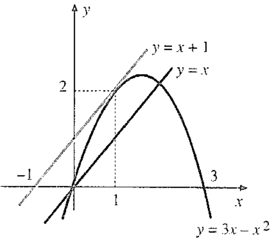
Çözüm : $f'(x) = 3x^2 - 3$ olduğundan

$$m = f'(2) = 3.4 - 3 = 9$$

olur. Ayrıca $f(2) = 8 - 6 = 2$ olduğundan, teğetin denklemi

$$y - 2 = 9(x - 2) \Rightarrow y = 9x - 16$$

olur.



ÖRNEK : $y = 3x - x^2$ eğrisinin $y = x$ doğrusuna paralel olan teğetin denklemini yazınız.

Çözüm : Önce teğetin değme noktasını bulalım. $y = x$ doğrusunun eğimi $m = 1$ olduğundan

$$y' = 3 - 2x = 1 \Rightarrow x = 1$$

olur. $x = 1$ için $y = 3 - 1 = 2$ olacağından teğetin değme noktası $A(1,2)$ noktasıdır. Eğimi de 1 olduğundan denklemi

$$y - 2 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x + 1$$

dir.

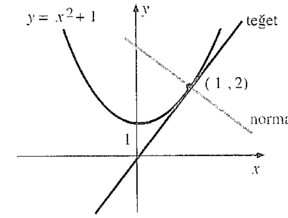
Bir eğrinin bir noktadaki normali, o noktadaki teğete dik olduğundan, $f'(a) \neq 0$ için, normalin eğimi

$$m_n = -\frac{1}{f'(a)}$$

olacaktır. Dolayısıyla normalin denklemi

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$$

olur.



ÖRNEK : $y = x^2 + 1$ eğrisinin apsisi 1 olan noktasından çizilen normalin denklemini yazınız.

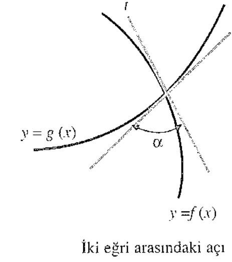
Çözüm : Apsis 1 olan noktanın ordinatı $y = 1^2 + 1 = 2$ dir. $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$ olduğundan normalin eğimi

$$m_n = -\frac{1}{2},$$

denklemi

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow x - 2y - 5 = 0$$

olur.



İki eğri arasındaki açı

> **TANIM**
>
> İki eğri bir C noktasında kesişmiş olsun. C noktasında bu iki eğriye t ve s teğetleri çizildiğinde, bu teğetlerin oluşturduğu açıya (ölçüleri farklı olduğunda dar açı olanına) bu iki eğri arasındaki açı denir. Bu açı dik olduğunda eğriler dik kesişiyor denir.

ÖRNEK : $y = 2x^2 + 3$ ve $y = \frac{3}{10}x^2 + \frac{47}{10}$ eğrileri kaç derecelik açı altında kesişirler?

Çözüm : Önce eğrilerin kesim noktalarını bulalım :

$$2x^2 + 3 = \frac{3}{10}x^2 + \frac{47}{10} \Rightarrow 17x^2 = 17 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \text{bulunur.}$$

Şu halde bu iki eğri $A(1,5)$ ve $B(-1,5)$ noktalarında kesişir. $A(1,5)$ noktasındaki teğetlerin eğimleri $y' = 4x$ ve $y' = \frac{6x}{10} = \frac{3x}{5}$ den $m_1 = 4$ ve $m_2 = \frac{3}{5}$ bulunur. Bu teğetlerin oluşturduğu açının ölçüsü α ise

$$\tan\alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{4 - \frac{3}{5}}{1 + 4.\frac{3}{5}} = 1$$

olacağından $\alpha = 45°$ dir. Şu halde verilen eğriler, $A(1,5)$ noktasında 45 derecelik açı altında kesişirler. $B(-1,5)$ de $m_1 = -4$, $m_2 = -\frac{3}{5}$ olacağından

$$\tan\theta = \frac{-4 + \frac{3}{5}}{1 + 4.\frac{3}{5}} = -1 \Rightarrow \theta = 135°$$

bulunur. Doğruların oluşturduğu geniş açının ölçüsü 135° olduğundan dar açının ölçüsü 45° dir. Şu halde verilen eğriler her iki noktada da 45° lik açı altında kesişirler.

ÖRNEK : $xy = a^2$, $x^2 - y^2 = b^2$ eğrilerinin dik kesiştiklerini gösteriniz.

Çözüm : İki eğrinin bir kesişme noktası (x_0, y_0) olsun.

$$xy = a^2 \Rightarrow y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow m_1 = -\frac{y_0}{x_0} \text{ olur.}$$

$$x^2 - y^2 = b^2 \Rightarrow 2x - 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{y} \Rightarrow m_2 = \frac{x_0}{y_0} \text{ bulunur.}$$

$$m_1 . m_2 = \left(-\frac{y_0}{x_0}\right)\left(\frac{x_0}{y_0}\right) = -1$$

olduğundan eğriler dik kesişir.

4.2 TÜREVİN FİZİKSEL UYGULAMALARI

Sabit bir hızla hareket eden bir cismin hızı, alınan yolu bu yolu almak için harcanan zamana bölmekle hesaplanır. Eğer hız her an değişiyorsa yine bölüm oluşturabilir. Bu bölüme hareket eden cismin ortalama hızı denir. Eğer bir zaman aralığında cismin hızına mümkün olduğu kadar yakın bir değer elde etmek istersek bu zaman aralığını çok küçük almak zorundayız. Hareket eden cismin aldığı s yolu t zamanının bir fonksiyonu olduğundan bunu $s(t)$ ile gösterelim. Bir t_0 zamanına kadar cismin aldığı yol $s(t_0)$ olur. t zamanına kadar alınan yol da $s(t)$ olduğundan cismin $\Delta t = t - t_0$ zaman aralığı içindeki ortalama hızı

$$\frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

olacaktır. Şu halde cismin t_0 anındaki hızını bulmak için yukarıdaki bölüm $t \to t_0$ için limitini almak gerekir. Yani bu cismin t_0 anındaki hızı

$$v(t_0) = \lim_{x \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = s'(t_0)$$

olacaktır. Benzer şekilde ivmenin birim zamandaki değişme olduğu gözönüne alınarak

$$a = \lim_{t \to 0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0} = v'(t_0)$$

olduğu gösterilebilir.

ÖRNEK : Düzgün hızlanan bir hareketlinin t anında aldığı yol, v_0 ilk hız ve a hareketin ivmesi olmak üzere, $s(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ biçiminde veriliyor. Bu hareketlinin t anındaki hızını bulunuz. Hangi t için, hareketlinin hızı v_0 ilk hızının iki katına çıkar.

Çözüm : Hız, yolun zamana göre türevi olduğundan

$$v(t) = s'(t) = v_0 + at$$

olur.

$$v_0 + at = 2v_0 \Rightarrow t = \frac{v_0}{a}$$

için hareketlinin hızı ilk hızın iki katına çıkar.

ÖRNEK : v_0 ilk hızı ile aşağıdan yukarıya doğru atılan bir cismin t anında aldığı yol, g yerçekim ivmesini göstermek üzere,

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

dir. Bu cismin t anındaki hızı ne olur? Hız ne zaman sıfır olur?

Çözüm : Hız, yolun zamana göre türevi olduğundan

$$v = s'(t) = v_0 - gt$$

bulunur.

$$v = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{g}$$

olmalıdır.

4.3 TÜREVİN İKTİSATTA UYGULANMASI

Bir üretim merkezi, belli bir zaman içinde bir Q malından q miktar üretmiş olsun. Üretimin toplam m maliyeti (lira), üretilen malın q miktarının (adet veya kg olabilir) bir fonksiyonudur. Bu fonksiyon $m = f(q)$ bağıntısı ile verilmiş olsun. q nun Δq artmasına karşılık maliyetin artma miktarı

$$\Delta m = f(q + \Delta q) - f(q)$$

olacaktır. Maliyetteki bu artma miktarı, ilk q miktardaki üretime Δq kadar ilave bir üretim elde etmek için maliyete eklenecek miktardır. Üretimin ek Δq miktarı için birim başına ortalama maliyet

$$\frac{\Delta m}{\Delta q} = \frac{f(q + \Delta q) - f(q)}{\Delta q}$$

olur. Birim başına ortalama maliyetin $\Delta q \to 0$ için limiti varsa bu limite q üretim seviyesindeki birim başına marjinal maliyet, veya kısaca, marjinal maliyet adı verilir. f fonksiyonu q da türevli ise marjinal maliyet

$$\lim_{\Delta q \to 0} \frac{f(q + \Delta q) - f(q)}{\Delta q} = f'(q) = m'$$

olacaktır. Eğer m lira, q kg cinsinden ifade edilmişse, marjinal maliyet, kg başına lira olarak ifade edilir.

ÖRNEK : Bir salça fabrikasında üretilen salçanın maliyet fonksiyonu, q üretilen salçanın ton olarak miktarını, m de milyon lira olarak maliyeti göstermek üzere

$$m = 1000 + 90q - q^2 , \quad 0 \le q \le 45$$

biçiminde veriliyor. Üretimin 40 ton olduğu anda marjinal maliyet kaç milyondur?

Çözüm : $m' = 90 - 2q$ ifadesinde $q = 40$ konursa

$$m' = 90 - 2.40 = 10 \text{ milyon/ ton}$$

olur.

TANIM

$y = f(x)$ fonksiyonu verilmiş olsun. x, Δx kadar arttığında y de Δy kadar değişmiş olsun. $\frac{\Delta x}{x}$, $\frac{\Delta y}{y}$ ifadelerine, sırası ile, x ve y nin oransal (nisbi) artışları denir.

$$\frac{Ey}{Ex} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ifadesine f fonksiyonunun esnekliği (elastikliği) denir. Eğer f türevli ise

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$$

olur.

Esneklik boyutsuz bir sayıdır. y nin x değişkenine göre esnekliği, x in yüzde 1'lik artışına karşılık y de meydana gelen artış veya azalışın yüzdesi olarak da düşünülebilir.

ÖRNEK : $y = 2x - 4$ olsun. y nin x'e göre esnekliğini bulunuz. $x = 4$ için esnekliği hesaplayınız. x, % 1 artarsa y yüzde kaç artar?

Çözüm :

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{x}{y} . \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} .2 = \frac{2x}{2x-4} = \frac{x}{x-2}$$

olur. $x = 4$ için

$$\frac{Ey}{Ex} = \frac{4}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

olacağından x in % 1 lik artışına karşılık, y % 2 artar.

Bir malın birim fiyatı p, üretim miktarı q ise, toplam hasılat $R = p.\, q$ olur. Genel olarak, üretim arttığında fiat düşer, üretim azaldığında fiat yükselir. Dolayısıyla fiat üretimin bir fonksiyonudur. $p = f(q)$ olsun. Bu durumda

$$R = p \,.\, q = f(q) \,.\, q$$

olacaktır. Marjinal hasılat hasılatın türevi olacağından

$$\frac{dR}{dq} = R' = q\, f'(q) + f(q)$$

bulunur.

ÖRNEK : Talep fonksiyonu, q üretim miktarı ile üretilen malın p birim fiyatı arasında $q = g(p)$ biçiminde bir fonksiyondur. Talep fonksiyonu $p = 1 - q$ olan bir malın marjinal hasılatını bulunuz.

Çözüm : $R = q \,.\, p = q\,(1 - q) = q - q^2$

olacağından, marjinal hasılat

$$R' = 1 - 2q$$

bulunur.

ÖRNEK : Talep fonksiyonu

$$p = 8 - q$$

olan bir mal için maksimum gelir ne olur?

Çözüm : Toplam gelir

$$R = p.\, q = 8q - q^2$$

olur. Bu fonksiyonun maksimumu bulunacaktır.

Parabolün tepe noktasının apsisi

$$-\frac{b}{2a} = \frac{8}{2} = 4$$

olacağından, fonksiyonun maksimum noktası $q = 4$ dür.

$$R(4) = 32 - 16 = 16$$

olur.

1. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin karşılarında yazılı noktalardaki teğetlerinin eğimini bulunuz.

(a) $y = x^3$, $A(1,1)$

(b) $y = x^2 + 4x$, $B(-1,-3)$

2. Aşağıda denklemleri verilen eğrilere, karşılarında apsisleri yazılı noktalarından çizilen teğetlerin denklemini yazınız.

(a) $y = 3x^3 - 2x^2 + 4$, $x = 1$

(b) $y = x^3 - x$, $x = 1$

(c) $y = x^2 + 2x + 3$, $x = -1$

(ç) $y = 2 - x - x^2$, $x = 2$

(d) $y = \frac{1}{3}x^3 - 1$, $x = -1$

(e) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$

(f) $y = \sin x$, $x = \pi$

(g) $y = \sin x + \cos x$, $x = \frac{\pi}{4}$

(h) $y = \frac{2x+1}{x-2}$, $x = 0$

(ı) $y = \frac{1}{(x+1)^2}$, $x = 0$

(i) $y = (1 + x^{1/3})^{2/3}$, $x = -8$

(j) $y = \sin\sqrt{x}$, $x = \pi^2$

(k) $y = e^{2x}$, $x = 0$

(l) $y = x\cos\sqrt{2x}$, $x = 0$

(m) $y = x\sqrt{x-1}$, $x = 5$

(n) $y = (x-2)^{1/7}$, $x = 2$

3. Aşağıda denklemleri verilen eğrilere, karşılarında apsisleri yazılı noktalarından çizilen teğet ve normallerin denklemini yazınız.

(a) $y = x^2 + 1$, $x = 0$

(b) $y = 1 - x^3$, $x = -1$

(c) $y = x^4 - 6x^2 + 2$, $x = 2$

(d) $y = 2\sin x + 3\cos x$, $x = \frac{\pi}{2}$

(e) $y = \sqrt{1-x}$, $x = 1$

4. $y = x^2 + 1$ eğrisinin hangi noktasındaki teğeti orijinden geçer?

5. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin karşılarında yazılı P noktalarından geçen teğetlerinin denklemini yazınız.

(a) $y = x^2$, $P(3,1)$

(b) $y = x^3$, $P(0,2)$

(c) $y = x^4$, $P(0,-3)$

(ç) $y = 4x - x^2$, $P(2,5)$

6. $f(x) = \begin{cases} 2\sin x, & x < 0 \ \ ise \\ 3x^2 + 2x, & x \geq 0 \ \ ise \end{cases}$

fonksiyonunun (0,0) noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

7. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \ \ ise \\ 0, & x = 0 \ \ ise \end{cases}$

fonksiyonunun (0,0) noktasındaki teğetini bulunuz.

8. $\begin{cases} x = t^2 + 3t - 8 \\ y = 2t^2 - 2t - 5 \end{cases}$

eğrisinin $A(2,-1)$ noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

9. $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$

parametrik denklemi ile verilen eğriye $t = \frac{\pi}{4}$ noktasından çizilen teğetin denklemini bulunuz.

10. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin karşılarında yazılı noktalarındaki teğetlerinin denklemini yazınız.

(a) $4x^3 - 3xy^2 + 5 = 0$, $A(1,2)$

(b) $x^5 + y^5 - 2xy = 0$, $B(1,1)$

(c) $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 6$, $C(2,2)$

11. $y = x^2 - 2x + 5$ eğrisinin hangi noktasındaki teğeti $y = x$ doğrusuna paraleldir?

12. $x^2 + y^2 = 25$ çemberinin hangi noktasındaki teğetinin eğimi $\frac{3}{4}$ olur?

13. $2xy = a^2$ eğrisinin herhangi bir noktasındaki teğetinin koordinat eksenleriyle oluşturduğu üçgenin alanının sabit ve a^2 sayısına eşit olacağını gösteriniz.

14. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ eğrisinin herhangi bir noktasından çizilen teğet eksenleri A ve B noktalarında kesiyor. $|OA| + |OB| = a$ olacağını gösteriniz.

15. $x + \sqrt{xy} = 1 - y$ denklemiyle verilen eğrinin $0x$– eksenine paralel olan teğetinin denklemini bulunuz.

16. $y = x^2$ eğrisine $A(3,0)$ noktasından çizilen teğetlerin denklemini bulunuz.

17. $y = \frac{1}{1+x}$ ile $y = \frac{1}{1+x^2}$ eğrilerinin kesim noktalarından çizilen teğetlerin denklemini bulunuz.

18. $y = x^3 - 3x + 5$ eğrisinin

(a) $y = -2x$ doğrusuna paralel

(b) $y = -\frac{x}{g}$ doğrusuna dik

(c) Ox– ekseni ile 45 derecelik açı yapan

teğetlerinin denklemini yazınız.

19. $y = e^x$ eğrisi $0y$– ekseni kaç derecelik açı altında keser?

20. Aşağıda denklemleri verilen eğriler hangi açı altında kesişirler?

(a) $y = \sin x$, $y = \cos x$

(b) $y = 4 - x$, $y = 4 - \frac{x^2}{2}$

(c) $y = 3x^2 - 1$, $y = 2x^2 + 3$

(ç) $y = e^{x/2}$, $x = 2$

(d) $y = \sqrt{x}$, $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$

(e) $y = x^2$, $y = x^3$

21. Aşağıda denklemleri verilen eğri çiftlerinin dik kesiştiklerini gösteriniz.

(a) $y = x^2 + 2x - 3$, $y = x^2 - \frac{9}{4}x + \frac{5}{4}$

(b) $y^2 = 6x + 9$, $y^2 = 9 - 6x$

(c) $x^2 - y^2 = 5$, $4x^2 + 9y^2 = 72$

22. Hangi c ler için $y = \frac{1}{x}$ ile $y = cx^3$ eğrileri dik kesişirler?

23. $y^2 = 2x^3$ eğrisinin hangi noktasındaki teğeti $4x - 3y + 2 = 0$ doğrusuna diktir?

24. $y = x^2 + 1$,

$y = x^2 - \cos\frac{\pi}{x^2 + 1}$

eğrilerinin kesim noktalarında aynı teğete sahip olduklarını gösteriniz.

25. $y = x^2$ eğrisinin $y = x - 2$ doğrusuna en yakın noktasının koordinatlarını bulunuz.

26. $y = x^2$ parabolüne $P(a,a^2)$ noktasından çizilen teğetin Ox– eksenini daima $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ da kestiğini gösteriniz.

27. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ eğrisine orijinde teğet olan doğrunun denklemini yazınız.

28. $x^2 + 4y^2 = 4$ elipsine teğet olan ve $A(4,0)$ noktasından geçen teğetlerinin denklemini yazınız.

29. $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ noktasından geçen ve $4y = x^2 + 4$ parabolüne teğet olan doğruların dik kesiştiklerini gösteriniz.

30. $y = -x$ doğrusunun $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ eğrisine teğet olduğunu gösteriniz. Bu teğetin değme noktasını bulunuz. Bu doğru eğriyi keser mi?

31. m nin hangi değerleri için $y = mx$ doğrusu $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ çemberine teğet olur?

32. $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ eğrisine, bu eğrinin $y = -x$ doğrusu ile kesim noktasından çizilen teğetlerin denklemini yazınız.

33. Yol denklemi

$$s = 5 + 3t + t^2$$

olan hareketlinin başlangıçtan 4 saniye sonraki hız ve ivmesini bulunuz.

34. Kütlesi 100 kg olan bir hareketlinin yol denklemi

$$s = 2t^2 + 3t + 1$$

dir. Bu hareketlinin 3. saniyedeki kinetik enerjisini hesaplayınız. (Kinetik enerjisinin $\frac{1}{2}mv^2$ olduğunu hatırlayınız.)

35. Kütlesi 6 gram olan bir hareketlinin yol denklemi

$$s = -1 + \ln(t+1) + (t+1)^3$$

dir. Cismin hareketten 1 saniye sonraki kinetik enerjisini hesaplayınız.

36. $p = 8 - q$ talep fonksiyonu veriliyor.

(a) Esnekliğini hesaplayınız.

(b) Marjinal hasılat fonksiyonunu bulunuz.

37. Talep eğrisi $p = a$ (a sabit) olan fonksiyon için marjinal hasılat ne olur?

38. $p = 10 - 3q$ talep eğrisi veriliyor.

(a) Talep esnekliğini bulunuz.

(b) $q = 1$, $q = 25$, $q = 0{,}5$ için esnekliğin değerini hesaplayınız.

39. $q\,p^a = b$ (a,b sabit) talep fonksiyonunun her noktadaki esnekliğinin aynı olacağını gösteriniz.

40. $pq = a$ (a sabit) talep eğrisinin esnekliğinin her noktada -1 olacağını gösteriniz.

4.4 MAKSİMUM – MİNİMUM

Bir fonksiyonun bir noktadaki türevinin bilinmesi o nokta civarında nasıl davrandığı hakkında fikir verir. Önce bunu açıklayan teoremi ifade ve ispat edelim.

TEOREM 4.1 :

I bir aralık, $f: I \to R$ fonksiyonu sürekli ve $a \in I$ da türevli olsun. Öyle bir $\delta > 0$ vardır ki, $f'(a) > 0$ ise f fonksiyonu $(a - \delta - a + \delta)$ da artan, $f'(a) < 0$ ise $(a - \delta, a + \delta)$ de azalandır.

İspat : $f'(a) > 0$ olsun. Bu takdirde

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

olur. Bu durumda öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $x \in (a - \delta, a)$ ve $(a, a + \delta)$ için

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$$

olur. Bu da f nin $(a - \delta, a + \delta)$ da artan olduğunu gösterir, zira

$x > a$ için $f(x) - f(a) > 0 \Rightarrow f(x) > f(a)$

$x < a$ için $f(x) - f(a) < 0 \Rightarrow f(x) < f(a)$

olur.

Benzer şekilde $f'(a) < 0$ olduğunda f nin $(a - \delta, a + \delta)$ aralığında azalan olduğu gösterilebilir.

Bu teoremden yararlanarak şu sonuç ifade edilebilir:

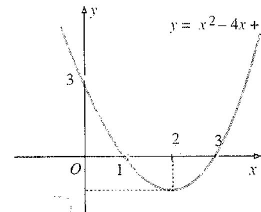
SONUÇ 4.1:

f fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli ve (a,b) nin herbir noktasında türevli olsun. Her $x \in (a,b)$ için $f'(x) > 0$ ise f, $[a,b]$ de artan, $f'(x) < 0$ ise $[a,b]$ de azalandır.

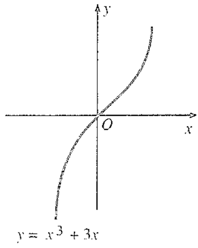
ÖRNEK : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ fonksiyonunun artan ve azalan oldukları aralıkları bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = 2x - 4$ dir. Şimdi bu ifadenin işaretini inceleyelim.

x		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$



O halde f fonksiyonu $(-\infty, 2]$ de azalan, $[2, +\infty)$ da artandır. Verilen fonksiyonun grafiği yanda çizilmiştir.



ÖRNEK : $f(x) = x^3 + 3x$ fonksiyonunun artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm :

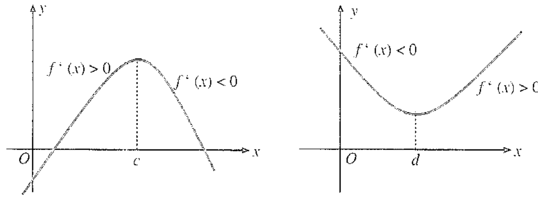
$f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1) > 0$ olduğundan fonksiyon $(-\infty, +\infty)$ aralığında artandır. Fonksiyonun grafiği yandaki gibidir.

f, $[a,b]$ de sürekli ve $c, d \in (a,b)$ olsun.

f fonksiyonu (a,c) de artan, (c,b) de azalan ise c de bir yerel maksimuma sahip olur. Eğer f, (a,d) de azalan, (d,b) de artan ise d de bir yerel minimuma sahip olur.

Şu halde bir c noktasının solunda $f'(x) > 0$, sağında $f'(x) < 0$ ise c de bir yerel maksimum vardır.

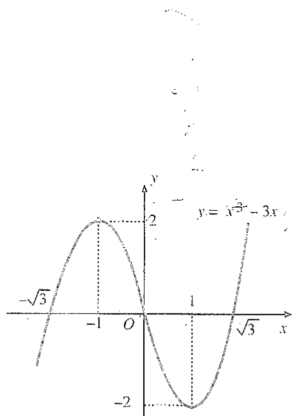
Eğer bir d noktasının solunda $f'(x) < 0$, sağında $f'(x) > 0$ ise d noktasında bir yerel minimum vardır.



ÖRNEK : $f(x) = x^3 - 3x$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve değerlerini bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ türevinin işaretini inceleyelim.

x		-1		1	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	Artan	max	Azalan	min	Artan



Bu tabloya göre fonksiyon $(-\infty, -1]$ de artan, $[-1,1]$ de azalan, $[1,+\infty)$ da artandır. Dolayısıyla -1 de yerel maksimum, 1 de yerel minimum vardır. Yerel maksimum değeri $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) = 2$, yerel minimum değeri $f(1) = 1 - 3 = -2$ olur. Fonksiyonun grafiği yanda verilmiştir. Yerel ekstremum noktalarının sağında ve solunda türev farklı işaretlidir. Estremum noktada türevin ne olacağını aşağıdaki teorem açıklamaktadır.

> **TEOREM 4.2 (Fermat Teoremi) :**
>
> $f : [a,b] \to R$ fonksiyonunun bir $c \in (a,b)$ noktasında bir yerel minimumu veya maksimumu varsa ve f fonksiyonu c noktasında türevlenebiliyorsa
>
> $$f'(c) = 0$$
>
> dır.

İspat : f fonksiyonu c noktasında bir yerel maksimuma sahip olsun. Bu takdirde öyle bir $\delta \in R^+$ vardır ki $|x - c| < \delta$ şartını sağlayan her x için $f(x) \le f(c)$ dir.

$|h| < \delta$ olacak şekilde seçilen her h için $c + h$ da bu komşuluğa dahil olacağından h ister negatif ister pozitif olsun.

$$f(c + h) \le f(c) \Rightarrow f(c + h) - f(c) \le 0$$

ve dolayısıyla

$$h > 0 \text{ için } \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \le 0 \Rightarrow f'(c) \le 0$$

$$h < 0 \text{ için } \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \ge 0 \Rightarrow f'(c) \ge 0$$

olur. Hipotez dolayısıyle f, c noktasında türevlenebilir olduğundan h ister pozitif değerlerden, ister negatif değerlerden sıfıra yaklaşsın

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c)$$

olur. Yukarıdaki iki eşitsizlikten $f'(c) = 0$ bulunur.

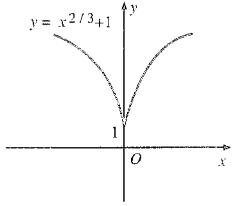
UYARI :

1) $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlanmış reel değerli bir f fonksiyonunun $c \in (a,b)$ noktasında türevinin var ve $f'(c) = 0$ olması fonksiyonun c noktasında bir yerel maksimum veya bir yerel minimuma sahip olmasını gerektirmez. Yani Fermat teoreminin karşıtı doğru değildir.

Gerçekten $f(x) = x^3$ şeklinde şeklinde tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonunun türev fonksiyonu

$$f'(x) = 3x^2$$

olup $f'(0) = 0$ dır. Halbuki $\forall x > 0$ için $f(x) > f(0) = 0$ ve $\forall x < 0$ için $f(x) < f(0) = 0$ dır. Böylece $c = 0$ noktası $f(x) = x^3$ fonksiyonu için ne bir yerel maksimum ne de bir yerel minimum noktasıdır.



2) Fonksiyon bir noktada yerel ekstremuma sahip olduğu halde o noktada türevli olmayabilir. Örneğin grafiği yanda verilen $f(x) = x^{2/3} + 1$ fonksiyonu için

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

olduğundan $x < 0$ için $f'(x) < 0$, $x > 0$ için $f'(x) > 0$ dır. Şu halde $x = 0$ bir yerel minimum noktasıdır. Halbuki $x = 0$ da türev yoktur. Yani $f'(0)$ mevcut değildir.

TANIM

$A \subset R$ kümesi üzerinde tanımlı, reel değerli bir f fonksiyonu verildiğinde

$$f'(c) = 0$$

şartını sağlayan c noktalarına f fonksiyonunun duraklama noktaları veya kritik noktaları denir.

ÖRNEK : $f(x) = 3x^5 - 20x^3$ fonksiyonunun kritik noktalarını bulunuz. Bunlardan hangileri yerel ekstremum noktalarıdır?

Çözüm :

$$f'(x) = 15x^4 - 60x^2 = 15x^2(x^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = 0, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = 2$$

olur. Şu halde kritik noktaların kümesi $\{-2, 0, 2\}$ dir. Türevin işaret tablosu yapılırsa

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	max	↘		↘	min	↗	

bulunur. Tablodan görüldüğü gibi, $x = -2$ de yerel maksimum, $x = 2$ de yerel minimum vardır. $x = 0$ kritik noktası bir ekstremum nokta değildir.

ÖRNEK : $f(x) = x\sin x + \cos x$ biçiminde tanımlanan $f : [0,2\pi] \to R$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını ve değerlerini bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$ dir. $(0,2\pi)$ aralığında $x > 0$ olduğundan $f'(x)$ in işareti $\cos x$ in işaretiyle aynıdır. Buna göre $f'(x)$ in işaret tablosu aşağıdaki gibi olacaktır.

x	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$f'(x)$	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$	1	↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	$-\frac{3\pi}{2}$	↗	1

$x = \frac{r}{2}$ de yerel maksimum, $x = \frac{3r}{2}$ de yerel minimum vardır. Yerel maksimum değeri $f\left(\frac{r}{2}\right) = \frac{r}{2}$, yerel minimum değeri $f\left(\frac{3r}{2}\right) = -\frac{3r}{2}$ olur.

Yukarıdaki tüm açıklamalardan sonra aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

TEOREM 4.3 :

$f : [a,b] \to R$ fonksiyonunun kritik noktaları $c_1, c_2, \ldots, c_p$, türevsiz olduğu noktalar $s_1, s_2, \ldots, s_r$ ise $\{f(a), f(c_1), f(c_2), \ldots f(c_p), f(s_1), \ldots, f(s_r), f(b)\}$ kümesinin en büyük elemanı f nin mutlak maksimum (en büyük) değeri, en küçük elemanı f nin mutlak minimum (en küçük) değeridir.

ÖRNEK : $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 45$ biçiminde tanımlanan $f : [-5,5] \to R$ fonksiyonunun en büyük en küçük değerini hesaplayınız. $f([-5,5])$ kümesini bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$ olduğundan

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 - 18x - 24 = 0 \Rightarrow 6(x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 4$$

tür. O halde kritik noktalar −1 ve 4 tür. Fonksiyonun türevsiz olduğu nokta yoktur. Buna göre

$$\{f(-5), f(-1), f(4), f(5)\}$$

kümesinin en büyük elemanı fonksiyonun mutlak maksimum (en büyük) değeri; en küçük elemanı fonksiyonun mutlak minimum (en küçük) değeridir.

$$f(-5) = 2.(-5)^3 - 9(-5)^2 - 24(-5) + 45 = -310$$
$$f(-1) = 2.(-1)^3 - 9(-1)^2 - 24(-1) + 45 = 58$$
$$f(4) = 2.4^3 - 9.4^2 - 24.4 + 45 = -67$$
$$f(5) = 2.5^3 - 9.5^2 - 24.5 + 45 = -50$$

olduğundan, fonksiyonun mutlak minimum değeri −310, mutlak maksimum değeri 58 dir. Buna göre $f([-5,5]) = [-310, 58]$ dir.

ÖRNEK : $[-2,2]$ üzerinde $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 12$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun yerel ve mutlak ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$ olduğundan türevi sıfır yapan değerler (kritik noktalar) $x_1 = x_2 = 0$ ve $x_3 = 1$ dir. $f'(x)$ in işaret tablosu

x	-2		0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0

şeklindedir. Türev sadece 1 civarında işaret değiştirdiğinden $(-2,2)$ aralığında sadece $x = 1$ de yerel ekstremum vardır. 1 noktasının solunda fonksiyon azalan, sağında artan olduğundan 1 noktasında yerel minimum vardır. Yerel minimum değeri

$$f(1) = 3 - 4 + 12 = 11$$

dir.

$$f(0) = 12$$

$$f(-2) = 3.\ 16 - 4.\ (-8) + 12 = 92$$

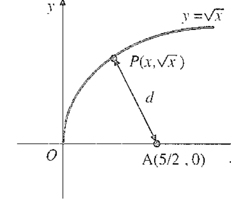
$$f(2) = 3.\ 16 - 4.\ 8 + 12 = 28$$

olduğundan $x = -2$ de mutlak maksimum $x = 1$ de mutlak minimum vardır.

İkinci türevin işareti ile ekstremumların varlığı ve cinsleri arasında sıkı bir ilişki vardır. Bu ilişkiyi şu teoremle verebiliriz.

> **TEOREM 4.4 :**
>
> f fonksiyonu (a,b) aralığında türevli, c noktası f fonksiyonunun bir duraklama noktası, $f''(c)$ mevcut ve sıfırdan farklı olsun.
>
> (1) Eğer $f''(c) > 0$ ise c de bir yerel minimum,
>
> (2) eğer $f''(c) < 0$ ise c de bir yerel maksimum
>
> vardır.

İspat : (1) $f'(x) = g(x)$ diyelim. Buna göre $g'(c) > 0$ dır. Teorem 4.1 den c nin öyle bir δ– komşuluğu vardır ki bu aralıkta g artandır. O halde $(c-\delta, c)$ aralığında $g(x) < g(c) = 0$ ve $(c, c+\delta)$ aralığında $0 = g(c) < g(x)$ dir. Şu halde $(c-\delta, c)$ aralığında $f'(x) < 0$ ve $(c, c+\delta)$ aralığında $f'(x) > 0$ dır. Demek ki f fonksiyonu c noktasında bir yerel minimuma sahiptir. (2) nin ispatı (1) in ispatına benzer olarak yapılır.



ÖRNEK : $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ noktasının $y = \sqrt{x}$ eğrisine olan uzaklığını hesaplayınız.

Çözüm : $A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ noktasının $y = \sqrt{x}$ eğrisine olan uzaklığı, A nın eğrinin noktalarına olan uzaklıklarının en küçüğüdür. Eğri üzerinde alınan noktalar $P(x,\sqrt{x})$ biçimindedir. Dolayısıyla A noktasının P noktasına olan uzaklığı

$$d = \sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + x}$$

olacaktır. Şu halde istenen nokta, d yi en küçük yapan x değerine karşılık gelen P noktasıdır. d yi en küçük yapan değer

$$f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + x$$

fonksiyonunu en küçük yapan değerdir.

$$f'(x) = 2\left(x - \frac{5}{2}\right) + 1 = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

olur.

$$f''(x) = 2 \Rightarrow f''(2) = 2 > 0$$

olduğundan $x = 2$ için fonksiyon en küçük değerini alır.

$$d = \sqrt{\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 + 2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

birim olur.

ÖRNEK : $f(x) = x \ln x - x$ şeklinde tanımlanan $f : R^+ \to R$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını bulunuz.

Çözüm :

$$f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} - 1 = \ln x$$

dir.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

olur.

$$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f''(1) = 1 > 0$$

olduğundan $x = 1$ yerel minimum noktasıdır.

Yerel minimum değeri $f(1) = 1 \ln 1 - 1 = -1$ olur.

4.5 MAKSİMUM – MİNİMUM PROBLEMLERİ

Bir maksimum – minimum problemini çözmek için aşağıdaki yolu izlemek yararlı olur.

1) Problemde verilenler değişkenlerle gösterilir.

2) Maksimum ya da minimum olması istenen çoklukla ilgili bir ifade bulunur.

3) Verilenler kullanılarak bazı değişkenler yok edilir. Tek değişkenli bir fonksiyon elde edilir.

4) Probleme göre değişkenin sınırları tespit edilir.

5) Kritik noktalar bulunur.

6) Fonksiyonun kritik noktalar ve aralığın uç noktalarındaki değerleri bulunur.

7) Bulunan fonksiyon değerlerinin en küçüğü fonksiyonun en küçük değeri, en büyüğü de fonksiyonun en büyük değeridir.

UYARI : Bu problemlerde maksimum ve minimumlar mutlak maksimum ve mutlak minimumlardır.

ÖRNEK : Toplamları 40 olan iki pozitif tamsayının kareleri toplamı en fazla kaç olur?

Çözüm :

1)
I. sayı	II. sayı
x	y

2) Maksimumu istenen ifade : $x^2 + y^2$

3) $x + y = 40 \Rightarrow y = 40 - x$ olur. Bu değer $x^2 + y^2$ de yerine konursa, maksimumu bulunacak ifade $f(x) = x^2 + (40 - x)^2$ olur.

4) x değişkeni 1 den 39 a kadar değer alabileceğinden $x \in [1,39]$ dur.

5) $[1,39]$ aralığında $f(x) = x^2 + (40 - x)^2$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun mutlak maksimumu bulunacaktır.

$$f'(x) = 2x + 2(40 - x).(-1) = 4x - 80$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 80 = 0 \Rightarrow x = 20$$

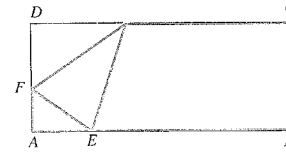
kritik noktadır.

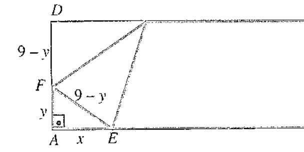
$$f(1) = 1^2 + 39^2 = 1521$$

$$f(20) = 20^2 + 20^2 = 800$$

$$f(39) = 39^2 + 1^2 = 1521$$

olduğundan en büyük değer 1521, en küçük değer 800 'dür.





ÖRNEK : 9 cm eninde dikdörtgen şeklindeki bir kağıt şerit, şekildeki gibi D köşesi kıvrılarak $[AB]$ kenarı üzerine getiriliyor. FAE üçgeninin alanı en fazla kaç cm² olabilir?

Çözüm : $|AE| = x$, $|AF| = y$ denirse, $|DF| = |FE| = 9 - y$ olur. Bu durumda

$$S = \text{Alan}(\widehat{FAE}) = \frac{1}{2}xy$$

dır. FAE dik üçgen olduğundan

$$x^2 + y^2 = (9 - y)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 81 - 18y + y^2 \Rightarrow$$

$$18y = 81 - x^2 \Rightarrow y = \frac{81 - x^2}{18}$$

olacaktır. Dolayısıyla

$$S(x) = \frac{1}{2}x.\frac{81 - x^2}{18} = \frac{1}{36}(81x - x^3)$$

olur. Bu fonksiyonun en büyük değeri bulunacaktır.

$$S'(x) = \frac{1}{36}(81 - 3x^2) = 0 \Rightarrow x = 3\sqrt{3}$$

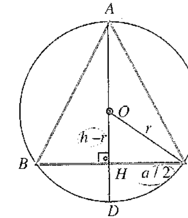
bulunur.

$$S''(x) = -\frac{x}{6} \Rightarrow S''(3\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$$

olacağından $x = 3\sqrt{3}$ de maksimum vardır.

$$S(3\sqrt{3}) = \frac{1}{36}(81.3\sqrt{3} - 81\sqrt{3}) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

olduğundan FAE üçgeninin alanı en fazla $\frac{9}{2}\sqrt{3}$ cm² olabilir.



ÖRNEK : r yarıçaplı bir çemberin içine çizilebilen bir ikizkenar üçgenin alanı en fazla ne olur?

Çözüm : $|AH| = h$, $|BC| = a$ denirse

$$S = \text{Alan}(\widehat{ABC}) = \frac{1}{2}a.h$$

olacaktır. OHC dik üçgeninde

$$r^2 = (h - r)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

olacağından

$$\frac{a^2}{4} = 2rh - h^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{2rh - h^2}$$

bulunur. Dolayısıyla

$S = \sqrt{2rh - h^2}\,.h$

olacaktır.

$$S' = \frac{2r - 2h}{2\sqrt{2rh - h^2}}h + \sqrt{2rh - h^2} = 0 \Rightarrow$$

$$(r - h)h + 2rh - h^2 = 0 \Rightarrow$$

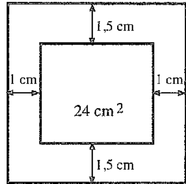
$$h\,(r - h + 2r - h) = 0 \Rightarrow$$

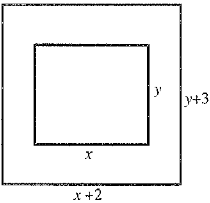
$$h\,(3r - 2h) = 0 \Rightarrow h = 0 \text{ veya } h = \frac{3r}{2}$$

bulunur. İşaret tablosu

h	0		$\frac{3}{2}r$		$2r$
S'	$-$ 0	+	0	$-$	
S	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$	↘	0

biçiminde olacağından, üçgenin alanının maksimum (en büyük) olması halinde $h = \frac{3}{2}r$ olmalıdır. Bu durumda maksimum alan $\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$ olur.





ÖRNEK : Bir kağıdın 24 cm² lik kısmına yazı yazılacaktır. Alttan ve üstten 1,5 cm, sağ ve soldan 1 cm boşluk bırakılacağına göre, bu kağıdın alanı en az kaç cm² olmalıdır?

Çözüm : Yazı yazılacak kısmın eni x, boyu y olsun. Kağıdın ebatları $x + 2$ ve $y + 3$ olur. Bu durumda kağıdın alanı

$$S = (x + 2)\,(y + 3)$$

olur. $x\,y = 24$ olacağından $y = \frac{24}{x}$ dir. Buna göre

$$S = (x + 2)\left(\frac{24}{x} + 3\right) = 3x + \frac{48}{x} + 30$$

olacaktır. Bu fonksiyonun minimumu bulunacaktır.

$$S' = 3 - \frac{48}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{3}{x^2}(x^2 - 16) = 0 \Rightarrow x = 4$$

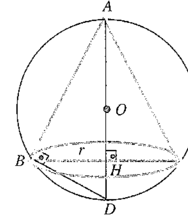
olur, zira $x > 0$ dır.

x	0		4		$+\infty$
S'		$-$	0	+	
S		↘	min	↗	

$x = 4$ de alan minimum olduğundan, kağıdın alanı en az

$$S(4) = 3\,.\,4 + \frac{48}{4} + 30 = 54 \text{ cm}^2$$

olmalıdır.



ÖRNEK : Yarıçapı 6 cm olan bir küre içine yerleştirilen bir dik koninin hacmi en fazla kaç cm³ olabilir?

Çözüm : $|AH| = h$, $|BH| = r$ olsun. ABD dik üçgeninde

$$|BH|^2 = |AH|\,.\,|HD| \Rightarrow$$

$$r^2 = h\,(12 - h) = 12h - h^2$$

olur. Buna göre koninin hacmi

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(12h - h^2)h = \frac{1}{3}\pi(12h^2 - h^3)$$

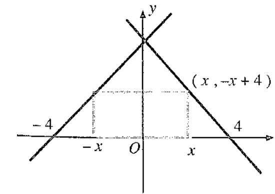
olacaktır.

$$V' = \frac{1}{3}\pi(24h - 3h^2) = 0 \Rightarrow h_1 = 0, \quad h_2 = 8$$

bulunur. $h > 0$ olacağından $h = 8$ dir. Buna göre maksimum hacim

$$V = \frac{1}{3}\pi(12.8^2 - 8^3) = \frac{256}{3}\pi$$

cm³ olur.



ÖRNEK : $y = x + 4$, $y = -x + 4$ doğruları ve Ox– ekseni tarafından sınırlanan bölgede bulunan, iki köşesi verilen doğrular, iki köşesi de Ox– ekseni üzerinde olan dikdörtgenin alanı en fazla kaç br² olabilir?

Çözüm : $A(x) = 2x(-x + 4) = 8x - 2x^2$

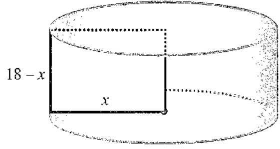
olduğundan

$$A' = 8 - 4x = 0 \Rightarrow x = 2$$

bulunur. $A'' = -4 < 0$ olduğundan $x = 2$ de maksimum vardır. Maksimum alan

$$A = 8\,.\,2 - 2\,.\,4 = 8 \text{ br}^2$$

olur.



ÖRNEK : Çevresi 36 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir karton kenarlarından biri etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dairesel silindirin hacmi en fazla kaç cm^3 olabilir?

Çözüm : Dikdörtgenin bir kenarına x denirse diğeri $18 - x$ olur.

$$V = \pi x^2 (18 - x) = \pi (18x^2 - x^3)$$

olacağından

$$V' = \pi(36x - 3x^2) = 0 \Rightarrow 3x(12 - x) = 0$$

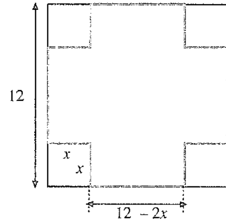
$\Rightarrow x = 0$ veya $x = 12$ olmalıdır. $x > 0$ olacağından $x = 12$ dir.

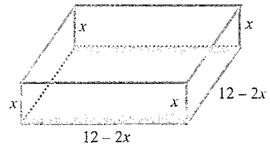
$$V'' = 36 - 6x \Rightarrow V''(12) = -36 < 0$$

olduğundan $x = 12$ için maksimum vardır. Maksimum hacim

$$V = \pi x^2 (18 - x) = \pi \,.\, 36 \,.\, 6 = 216\pi$$

cm^3 olur.





ÖRNEK : Bir kenarının uzunluğu 12 cm olan kare şeklindeki bir kartonun köşelerinden birer eşit alanlı kare kesilerek geriye kalan parçadan üstü açık bir kare prizma yapılıyor. Bu prizmanın hacmi en fazla kaç cm^3 olur?

Çözüm : Prizmanın hacmi

$$V(x) = (12 - 2x)^2 \, x = 4 \,.\, (36x - 12x^2 + x^3)$$

olacağından

$$V'(x) = 4\,(36 - 24x + 3x^2)$$

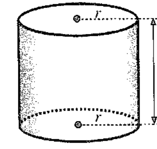
$$= 12(x^2 - 8x + 12) = 12(x - 2)\,(x - 6)$$

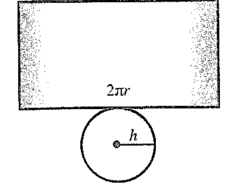
olur. Bunun değişim tablosu

x	0		2		6
V'		+	0	–	0
V	0	↗		↘	0

şeklinde olacağından maksimum hacim

$$V(2) = 8^2 \,.\, 2 = 128 \ cm^3 \text{ olur.}$$





ÖRNEK : Bir sanayici, alüminyumdan dik dairesel silindir şeklinde üstü açık, 64 cm^3 hacminde kutular yapmaktadır. En az alüminyum kullanması için yapacağı silindirin taban yarıçapı kaç cm olmalıdır?

Çözüm : Kullanılacak alüminyumun alanı

$$A = \pi r^2 + 2\pi r h$$

cm^2 dir. Hacmi 64 cm^3 olacağından

$$\pi r^2 h = 64 \Rightarrow h = \frac{64}{\pi r^2}$$

olur. Buna göre alan

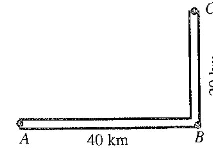
$$A(r) = \pi r^2 + 2\pi r \frac{64}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{128}{r}$$

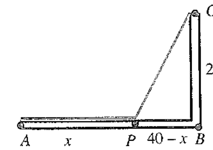
olur. Bu fonksiyonu minimum yapan r değeri bulunacaktır.

$$A'(r) = 2\pi r - \frac{128}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 = 128$$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{64}{\pi} \Rightarrow r = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$$

olmalıdır.





ÖRNEK : B köyü A köyünün 40 km doğusunda, C köyü de B nin 20 km kuzeyindedir. A ile B ve B ile C arasında stabilize yol mevcuttur. A ile C arası asfaltlanacaktır. 1 km stabilize yolun asfaltlanması 30 milyar TL ye, 1 km yeni yolun açılıp asfaltlanması 60 milyar TL ye mal olmaktadır. A ile C arasındaki asfalt yol en az kaç milyara mal olur?

Çözüm : AB yolu üzerinde bir P noktasına gittikten sonra P den C ye bir yeni yol açıldığını kabul edelim. $|AP| = x$ denirse, $x = 0$ olması halinde P ile A çakışır. Bu durum A ile C arasına tümüyle yeni bir yol açılacağını ifade eder. $x = 40$ km ise bu P nin B ile çakışması demektir. Bu durum stabilize yolların asfaltlanacağı anlamına gelir. Buna göre yolun maloluş fiyatı, $0 \le x \le 40$ için

$$M(x) = x \,.\, 30 + \sqrt{(40 - x)^2 + 400} \,.60$$

$$= 30\left(x + 2\sqrt{(40 - x^2) + 400}\right)$$

milyar lira olur. Şimdi bu fonksiyonun kritik noktalarını bulalım.

$$M'(x) = 30\left(1 + 2\frac{2(40-x)(-1)}{2\sqrt{(40-x)^2+400}}\right)$$

$$= 30\left(1 - 2\frac{(40-x)}{\sqrt{(40-x)^2+400}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{(40-x)^2+400} = 2(40-x)$$

$$\Rightarrow (40-x)^2 + 400 = 4\,(40-x)^2$$

$$\Rightarrow 3\,(40-x)^2 = 400$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\,(40-x) = 20$$

$$\Rightarrow x = 40 - \frac{20}{\sqrt{3}}$$

bulunur. Buna göre,

$$M(x) = 30\left(x + 2\sqrt{(40-x)^2+400}\right)$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$M(0) = 30\,.\,2\sqrt{1600+400} = 30.\,2.\,20\sqrt{5}$$

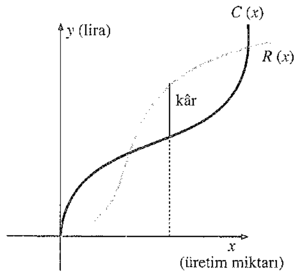
$$= 1200\sqrt{5} \cong 2683\,,$$

$$M\left(40-\frac{20}{\sqrt{3}}\right) = 30\left(40-\frac{20}{\sqrt{3}} + 2\sqrt{\left(\frac{20}{\sqrt{3}}\right)^2+400}\right)$$

$$= 1200 + 200\sqrt{3} \cong 1546\,,$$

$$M(40) = 30(40 + 2\sqrt{400}) = 2400$$

bulunur. Şu halde en az 1546 milyar = 1. 546.000.000.000 TL ye mal olur.



ÖRNEK : x parça mal satıldığında, toplam maloluş fiyatı $C(x)$, toplam gelir $R(x)$ ise, kâr $P(x) = R(x) - C(x)$ dir. Maksimum kârın marjinal gelir ile marjinal mal oluşun eşit olduğu durumlarda doğacağını gösteriniz.

Çözüm : $R(x)$ ve $C(x)$ in $x > 0$ için türevli olduğunu kabul edelim.

$P(x) = R(x) - C(x)$ maksimuma sahipse $P'(x) = 0$ dır. Dolayısıyla

$$P'(x) = R'(x) - C'(x) = 0 \Rightarrow R'(x) = C'(x)$$

olur.

1. Aşağıdaki fonksiyonların artan veya azalan olduğu aralıkları bulunuz.

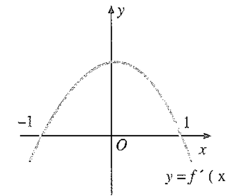
(a) $f : R \to R$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

(b) $f : R \to R$, $f(x) = \dfrac{x}{4+x^2}$

(c) $f : [0, 2\pi] \to R$, $f(x) = x\cos x - \sin x$

(ç) $f : R \to R$, $f(x) = 2x - x^2$

2.



Yukarıda $f : R \to R$ fonksiyonunun türevinin grafiği verilmiştir.

(a) f fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıkları bulunuz.

(b) Hangi noktalarda yerel maksimum hangilerinde yerel minimum vardır?

3. Aşağıdaki fonksiyonların yerel maksimum ve yerel minimum noktalarını bulunuz.

(a) $f : R \to R$, $f(x) = x^3 - 3x$

(b) $f : R \to R$, $f(x) = x^2\,(x^2 - 4)$

(c) $f : R \to R$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

(d) $f : R \setminus \{0\} \to R$, $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

(e) $f : R \to R$, $f(x) = (x-1)^2\,(x+2)$

(f) $f : R \to R$, $f(x) = x\,e^{-x}$

4. Aşağıdaki eşitliklerle verilen fonksiyonların karşılarında yazılı aralıklardaki mutlak maksimum ve mutlak minimum değerlerini bulunuz.

(a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $I = [-3,10]$

(b) $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $I = [-2,10]$

(c) $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $I = [0,1]$

(ç) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $I = [0,2]$

(d) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $I = \left[\dfrac{1}{100}, 100\right]$

(e) $f(x) = \sqrt{3-4x}$, $I = [-1,1]$

(f) $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$, $I = [-1,0]$

(g) $f(x) = \sqrt{2-x-x^2}$, $I = [-2,1]$

(h) $f(x) = 4\sin x + 2\cos 2x$, $I = [0,\pi]$

(ı) $f(x) = x^{2/3}$, $I = [-1,8]$

(i) $f(x) = 2^x$, $I = [-1,5]$

5. $f(x) = (x - c_1)^2 + (x - c_2)^2 + \ldots + (x - c_n)^2$

fonksiyonu hangi noktada maksimum değerini alır?

6. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı aralıkta bir mutlak maksimuma sahip olduğunu gösterip bu değeri bulunuz.

(a) $f(x) = \cot x - \sqrt{2}\csc x$, $I = (0,\pi)$

(b) $f(x) = \tan x + \sqrt{3}\cot x$, $I = \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

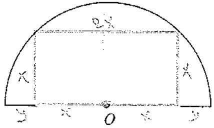
7. $f(x) = x^2 + 2ax + 3$ biçiminde tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonunun en küçük değeri -6 olduğuna göre, a nedir?

8. Hipotenüs uzunluğu $10\sqrt{2}$ birim olan bir dik üçgenin alanı en fazla kaç birimkaredir?

9. Alanı 36 cm^2 olan bir dikdörtgenin çevresi en az kaç cm olur?

10. A(2,0) noktasının $y = \sqrt{x}$ eğrisine olan uzaklığını hesaplayınız.

11.

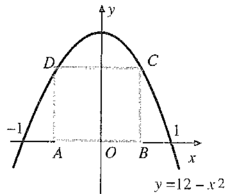


Yukarıda R yarıçaplı bir yarıçemberin içine bir dikdörtgen çizilmiştir. Dikdörtgenin alanı en fazla kaç br^2 olabilir?

12. R yarıçaplı bir çember içine çizilebilen bir ikizkenar üçgenin alanı en fazla ne olabilir?

13. R yarıçaplı bir çember içine çizilebilen maksimum alanlı bir ikizkenar üçgenin yüksekliği ne olur?

14.

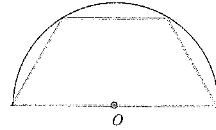


İki köşesi Ox– ekseni iki köşesi de $y = 12 - x^2$ parabolü üzerinde bulunan dikdörtgenin alanı en fazla kaç br^2 olabilir?

15. Sacdan hacmi 1 litre olan bir dik dairesel silindir yapmak için en az kaç cm^2 saca ihtiyaç vardır? Bu silindirin boyutları nedir?

16. Bir üçgenin iki kenarı a ve b, bu iki kenarın oluşturduğu açının ölçüsü θ olduğuna göre, bu üçgenin alanı θ nın hangi değeri için maksimum olur? Maksimum alanlı üçgenin alanı ne olur?

17.

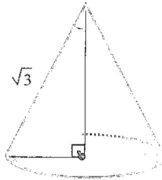


Yarıçapı 1 cm olan yarıçember içine çizilebilen yamuğun alanı en fazla kaç cm^2 olabilir?

18. Çevresi aynı sayıya eşit olan dikdörtgenler içinde alanı en büyük olanının kare olacağını gösteriniz.

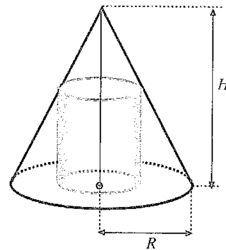
19. $y = \sqrt{x}$ eğrisinin $(c,0)$ noktasına en yakın noktası hangi noktadır? ($c \geq \frac{1}{2}$ ve $c < \frac{1}{2}$ için irdeleyiniz.)

20. Hipotenüsü $\sqrt{3}$ birim olan bir diküçgen, dik kenarlarından biri etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dairesel koninin hacmi en fazla kaç br^3 olur?



21. İçine 4 cm yarıçaplı bir küre yerleştirilebilen bir dik dairesel koninin hacmi en az kaç cm^3 olur?

22.



Taban yarıçapı R, yüksekliği H olan bir koninin içine yerleştirilebilen maksimum hacimli silindirin hacmi ne olur?

4.6 TÜREVLE İLGİLİ TEOREMLER

Kapalı bir aralıkta sürekli, bu aralığın iç noktalarında türevli fonksiyonların önemli bazı özellikleri vardır. Bu kesimde bunlardan bazılarını ifade ve ispat edeceğiz.

TEOREM 4.5 (Rolle Teoremi) **:**

f, $[a,b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in (a,b)$ noktasında türevli olsun.

Eğer $f(a) = f(b)$ ise (a,b) aralığında $f'(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktası vardır.

İspat : f nin $[a,b]$ de aldığı en büyük değer M, en küçük değer m olsun. Eğer $M = m$ ise fonksiyon sabit fonksiyon olur ki bu takdirde her x için $f'(x) = 0$ olacağından teorem aşikardır.

Şimdi $M \neq m$, yani $m < M$ olsun. $f(a) = f(b)$ olduğundan fonksiyon hem M, hem de m değerlerini aralığın uç noktalarında alamaz. Kabul edelim ki f fonksiyonu M değerini bir $c \in (a,b)$ noktasında alsın. Fermat teoreminden dolayı $f'(c) = 0$ olur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Rolle teoreminin geometrik yorumu şudur :

SONUÇ 4.2 :

f, $[a,b]$ aralığında sürekli ve iç noktalarda türevli ve $f(a) = f(b)$ ise eğrinin en az bir noktasındaki teğeti $0x$– eksenine paraleldir.

Özel olarak, $f(a) = f(b) = 0$ alınırsa Rolle teoreminden şu cebirsel sonuç elde edilir:

SONUÇ 4.3 :

Kapalı bir aralıkta sürekli ve iç kısmında türevlenebilen bir fonksiyonun iki sıfır yeri (kökü) arasında türevinin sıfır olduğu en az bir yer vardır.

ÖRNEK : $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ olsun. $f'(x) = 0$ denkleminin kökleri için birer sınır bulunuz.

Çözüm: $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)(x - 2)$

olduğundan $f'(x) = 0$ denkleminin üç reel kökü vardır. Zira $f(-2) = f(-1) = 0$ olduğundan en az bir $x_1 \in (-2,-1)$ için $f'(x_1) = 0$ dır. Benzer şekilde $-1 < x_2 < 1$ ve $1 < x_3 < 2$ bağıntılarını sağlayan iki kök daha vardır. Gerçekten

$$f'(x) = 4x^3 - 10x = 0 \Rightarrow 2x(2x^2 - 5) = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = -\sqrt{\frac{5}{2}}\ ,\quad x_2 = 0,\quad x_3 = \sqrt{\frac{5}{2}}\ \text{ olur.}$$

ÖRNEK : Rolle Teoreminden yararlanarak

$$5x^4 - 4x + 1 = 0$$

denkleminin (0,1) aralığında bir köke sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $f(x) = x^5 - 2x^2 + x$ denirse $f'(x) = 5x^4 - 4x + 1$ olur. Diğer taraftan $f(0) = f(1) = 0$ olduğundan $f'(x) = 0$ olacak şekilde en az bir $x \in (0,1)$ vardır. Dolayısıyla $5x^4 - 4x + 1 = 0$ olacak şekilde en az bir $x \in (0,1)$ vardır.

TEOREM 4.6 (Diferensiyel Hesabın Ortalama Değer Teoremi) :

$f : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in (a,b)$ noktasında türevlenebilir olsun. Bu taktirde (a,b) aralığında

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.

İspat : k bir sabit olmak üzere,

$$G : [a,b] \to R, \quad G(x) = f(x) + k \,.\, x$$

fonksiyonunu teşkil edelim. Bu fonksiyon da $[a,b]$ aralığında sürekli ve her $x \in (a,b)$ noktasında türevlenebilirdir. Şimdi k sabitini $G(a) = G(b)$ olacak şekilde seçelim.

$$f(a) + ka = f(b) + kb$$

den

$$k = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

bulunur. Şu halde

$$G(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\, x$$

fonksiyonu Rolle teoreminin bütün şartlarını sağlar. Bu sebepten $[a,b]$ kapalı aralığının iç kısmında $G'(x_0) = 0$ olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır. Buradan

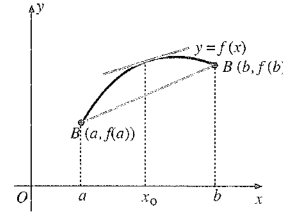
$$f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \;\Rightarrow\; f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olur. Bu $f'(x_0)$ değerine fonksiyonun $[a,b]$ aralığındaki ortalama değeri denir.

a ile b arasındaki bir sayı $0 < \theta < 1$ olmak üzere

$$a + \theta\,(b - a)$$

şeklinde yazılabildiğinden, teoremin hipotezleri altında $0 < \theta < 1$ şartını sağlayan en az bir θ vardır ki bu θ sayısı için



$$f'(a + \theta\,(b - a)) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olur.

Ortalama değer teoreminin geometrik anlamı şudur:

f, $[a,b]$ de sürekli ve iç kısmında türevli ise $y = f(x)$ eğrisinin $A(a, f(a))$ ve $B(b, f(b))$ noktalarından geçen doğruya paralel olan en az bir teğeti vardır.

ÖRNEK : $f : [-1,2] \to R$, $f(x) = x^2 + 2x$ fonksiyonunun ortalama değerini hesaplayınız. Teoremde adı geçen x_0 noktasını bulunuz.

Çözüm :
$$f'(x_0) = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} \Rightarrow 2x_0 + 2 = \frac{8 - (-1)}{3} = 3$$

$$\Rightarrow 2x_0 + 2 = 3 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2} \text{ olur.}$$

Şu halde ortalama değeri 3, teoremde adı geçen nokta $\frac{1}{2}$ dir.

ÖRNEK : Her $x \in R$ için,

$$e^x \geq 1 + x$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $x > 0$ olsun. $f(x) = e^x$ şeklinde tanımlanan $f : R \to R$ fonksiyonuna $[0, x]$ aralığında ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^{x_0} \qquad (0 < x_0 < x)$$

ve buradan da

$$\frac{e^x - 1}{x} = e^{x_0} > e^0 = 1 \;\Rightarrow\; e^x > x + 1$$

bulunur.

$x = 0$ ise eşitlik hali mevcuttur. $x < 0$ ise $f(x) = e^x$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna $[x,0]$ aralığında ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\frac{f(0) - f(x)}{0 - x} = f'(x_0) \qquad (x < x_0 < 0)$$

olacağından

$$\frac{1 - e^x}{-x} = e^{x_0} < e^0 = 1$$

olur. $-x > 0$ olduğundan

$$1 - e^x < -x \;\Rightarrow\; e^x > 1 + x$$

bulunur.

TEOREM 4.7 (Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoremi) :

f ve g fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli ve bunun iç kısmında türevlenebilir olsunlar. Ayrıca $\forall x \in (a,b)$ için $g'(x) \neq 0$ olsun. Bu takdirde (a,b) aralığında

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.

İspat : Ortalama Değer Teoreminden dolayı

$$g(b) - g(a) = g'(a + \theta(b-a))(b-a), \qquad (0 < \theta < 1)$$

dır ve $g'(a+\theta(b-a)) \neq 0$ olduğundan $g(b) - g(a) \neq 0$ dır. Şimdi k bir sabit olmak üzere

$$T(x) = f(x) + k\, g(x)$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. $T(a) = T(b)$ olacak şekilde k yı tesbit edelim.

$$T(a) = T(b) \Leftrightarrow f(a) + k\, g(a) = f(b) + k\, g(b) \Rightarrow$$

$$k = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

olur. Şu halde

$$T(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g(x)$$

yazılabilir. Bu fonksiyon $[a,b]$ aralığında sürekli ve bu aralığın uç kısmında türevlenebilir olduğundan Rolle teoreminin şartlarını sağlar. Bu sebepten (a,b) aralığında $T'(x_0) = 0$ olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır. Bu durumda

$$f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\, g'(x_0) = 0$$

olur. Buradan da

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

yazılabilir. O halde $(0,1)$ aralığındaki en az bir θ için

$$\frac{f'(a+\theta(b-a))}{g'(a+\theta(b-a))} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

olur.

ÖRNEK : $f : [0,1] \to R$, $f(x) = x^3 + x$, $g : [0,1] \to R$, $g(x) = x^2$ fonksiyonlarına genelleştirilmiş ortalama değer teoremini uygulayarak, adı geçen x_0 noktasını bulunuz.

Çözüm :

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)} \Rightarrow \frac{3x_0^2+1}{2x_0} = \frac{2-0}{1-0}$$

$$\Rightarrow 3x_0^2 + 1 = 4x_0 \Rightarrow 3x_0^2 - 4x_0 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{1}{3} \quad \text{ve} \quad x_0 = 1$$

bulunur. $x_0 \in (0,1)$ olacağından, teoremde adı geçen nokta $x_0 = \frac{1}{3}$ tür.

Şimdi Ortalama Değer Teoreminden elde edilen bazı sonuçları verelim.

SONUÇ 4.4 : f, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) = 0$ ise f sabit fonksiyondur.

İspat : $x \in (a,b]$ olmak üzere f fonksiyonuna $[a,x]$ aralığında ortalama değer teoremini uygulayalım. $[a,x)$ aralığında

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c) \Rightarrow f(x) - f(a) = (x-a)\, f'(c)$$

olacak şekilde en az bir c sayısı vardır. $f'(c) = 0$ olduğundan

$$f(x) - f(a) = 0 \Rightarrow f(x) = f(a)$$

bulunur. Her $x \in (a,b]$ için $f(x) = f(a)$ olduğundan $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) = f(a)$ dır. $f(a) = k$ denirse $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) = k$ olur.

SONUÇ 4.5 : f ve g, $[a,b]$ aralığında sürekli ve bu aralığın iç noktalarında türevli olsun. $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) = g'(x)$ ise $f(x)$ ile $g(x)$ bir sabit kadar farklıdır. Başka bir deyişle $\forall x \in [a,b]$ için $f(x) = g(x) + k$ olacak şekilde bir k sabiti vardır.

İspat : $h(x) = f(x) - g(x)$ denirse $\forall x \in (a,b)$ için $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ dır. Bir önceki sonuçtan h bir sabit fonksiyondur. $h(x) = k$ denirse $f(x) - g(x) = k$, buradan da

$$f(x) = g(x) + k$$

bulunur.

ÖRNEK : $f'(x) = 3x^2$ ve $f(1) = 3$ olduğuna göre, $f(x)$ nedir?

Çözüm : $g(x) = x^3$ türevi $3x^2$ olan bir fonksiyon olduğundan öyle bir k sabiti vardır ki

$$f(x) = g(x) + k = x^3 + k$$

olur. $f(1) = 3$ olduğu gözönüne alınırsa

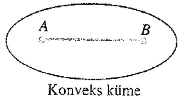
$$f(1) = 1 + k = 3 \Rightarrow k = 2$$

bulunur. Şu halde istenen fonksiyon

$$f(x) = x^3 + 2$$

dir.

4.7 KONVEKS FONKSİYONLAR



Konveks küme



Konveks olmayan küme

Bu kesimde önemli bir fonksiyon sınıfını tanıtacağız.

> **TANIM :**
>
> $K \subset R^2$ olsun. Eğer K kümesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası K kümesinin içinde kalıyorsa K ya bir konveks küme adı verilir.

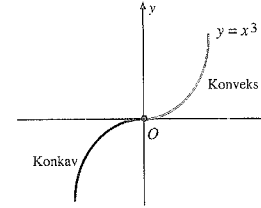
Bu tanıma göre üçgenlerin, karelerin, çemberlerin iç bölgeleri ile aralıklar birer konveks bölgedir. Şimdi konveks kümelerden yararlanarak bir fonksiyonun konveksliğini tanımlayalım.

> **TANIM :**
>
> f fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer
>
> $K = \{ (x,y) : x \in [a,b]$ ve $y \geq f(x) \}$
>
> kümesi, yani fonksiyonun grafiğinin üst tarafında bulunan bölge konveks ise f fonksiyonu konvekstir veya yukarı bükümlüdür denir.

ÖRNEK : $f(x) = x^2$ fonksiyonu konveks midir?

Çözüm : $K = \{ (x,y) : x \in R,\ y \geq x^2 \}$ kümesi bir konveks kümedir, zira bu küme içinde alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğrunun tüm noktaları yine bu bölgededir.

> **TANIM :**
>
> Eğer bir fonksiyonun grafiğinin alt tarafında kalan bölge konveks ise eğri konkav veya aşağı bükümlüdür denir.

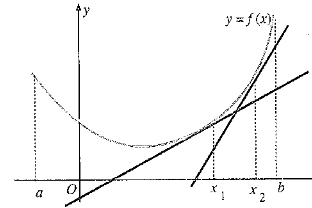


Bir fonksiyon tanım kümesinin bir kısmında konveks bir kısmında konkav olabilir. Örneğin

$$f(x) = x^3$$

fonksiyonu $[0,\infty)$ da konveks, $(-\infty, 0]$ da konkavdır.

Yandaki şekli inceleyiniz.



f fonksiyonu $[a,b]$ de sürekli ve iç noktalarında türevli olsun. Yandaki şekilden de görüldüğü gibi x_1 apsisli noktadaki teğetin eğimi, x_2 apsisli teğetin eğiminden küçüktür. Teğetin eğimi değme noktasındaki türev olduğundan $f'(x_1) < f'(x_2)$ dir. Şu halde

$$\text{her } x_1 < x_2 \text{ için } f'(x_1) < f'(x_2) \text{ dir.}$$

Bu da f' nün $[a,b]$ de artan olduğunu gösterir. Artan fonksiyonun türevi pozitif olacağından

$$(f')'(x) \geq 0 \Rightarrow f''(x) \geq 0 \text{ dır.}$$

Benzer şekilde, f konkav olduğunda $f''(x) \leq 0$ olacağı gösterilebilir. O halde şu teorem ispatlanmış oldu :

> **TEOREM 4.8 :**
>
> $f : [a,b] \to R$ fonksiyonunun (a,b) üzerinde ikinci türevi var olsun.
>
> Eğer $\forall x \in (a,b)$ için $f''(x) > 0$ ise f fonksiyonu $[a,b]$ de konveks, $f''(x) < 0$ ise konkavdır.

ÖRNEK : $y = 3x^5 - 10x^3$ eğrisinin konveks ve konkav olduğu aralıkları bulunuz.

Çözüm : $y' = 15x^4 - 30x^2 \Rightarrow y'' = 60x^3 - 60x$ olur.

$y'' = 60x^3 - 60x = 60x(x-1)(x+1)$ ifadesinin işaretini inceleyelim.

x		-1		0		1	
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	konkav		konveks		konkav		konveks

Şu halde $(-1,0)$ ve $(1,+\infty)$ da konveks, $(-\infty,-1)$ ve $(0,1)$ de konkavdır.

TANIM

Bir f fonksiyonunun konvekslikten konkavlığa veya konkavlıktan konveksliğe geçtiği ve fonksiyonun sürekli olduğu noktaya **dönüm (büküm) noktası** adı verilir.

Yukarıdaki incelemeler gözönüne alındığında büküm noktası için şu önermeler ifade edilebilir.

1) a noktası f için bir dönüm noktası ise ya $f''(a) = 0$ ya da $f''(a)$ mevcut değildir.

2) f'' fonksiyonu a noktasında işaret değiştiriyorsa a noktası f nin bir dönüm noktasıdır.

ÖRNEK : $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ fonksiyonunun konveks ve konkav olduğu aralıkları belirleyiniz. Varsa dönüm noktasını bulunz.

Çözüm :

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 4$, $f''(x) = 6x - 6$ olur.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkav	6	konveks

Fonksiyon $(-\infty,1)$ de konkav, $(1,+\infty)$ da konveksdir. Eğrinin dönüm noktası $(1,6)$ noktasıdır. Eğrinin grafiği aşağıda çizilmiştir.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı aralıklarda Rolle teoreminin hipotezlerini sağladığını gösteriniz. Teoremde adı geçen c noktasını bulunuz.

   (a) $f(x) = x^2 - 2x$ $[0,2]$

   (b) $f(x) = 9x^2 - x^4$ $[-3,3]$

   (c) $f(x) - x - x^3$ $[0,1]$

   (ç) $f(x) = 5x^{2/3} - x^{5/3}$ $[0,5]$

   (d) $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ $[-1,1]$

2. $m, n \in Z^+$ olmak üzere, $f(x) = x^m (1 - x)^n$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında Rolle Teoreminin hipotezini sağladığını gösteriniz. Teoremde adı geçen c noktasının $[0,1]$ aralığını $\dfrac{m}{n}$ oranında böldüğünü gösteriniz.

3. $f(x) = 1 - x^{2/3}$ fonksiyonu $[-1,1]$ üzerinde sürekli ve $f(-1) = f(1) = 0$ dır. $(-1,1)$ de $f'(c) = 0$ olacak şekilde bir c var mıdır? Bu sonuç Rolle Teoremiyle çelişir mi?

4. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \quad ise \\ 0, & x = 1 \quad ise \end{cases}$ fonksiyonu için

   $f(0) = f(1) = 0$ dir. $\forall x \in (0,1)$ için $f'(x) = 1 \neq 0$ dır. Bu sonuç Rolle Teoremiyle çelişir mi?

5. Rolle teoreminden yararlanarak

   $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

   denkleminin bir tek reel köke sahip olduğunu gösteriniz.

6. $x^7 + x^5 + x^3 + x + 1 = 0$ denkleminin bir tek reel köke sahip olduğunu gösteriniz.

7. $x^8 + x - 1 = 0$ denkleminin sadece iki reel köke sahip olduğunu gösteriniz.

8. Aşağıdaki denklemlerin, karşılarında yazılı aralıklarda bir tek köke sahip olduğunu gösteriniz.

   (a) $x^5 + 2x - 3 = 0$, $[0,1]$

   (b) $x^{10} = 1000$, $[1,2]$

   (c) $x^4 - 3x = 20$, $[2,3]$

   (ç) $x - \dfrac{2}{x} = 0$, $[1,3]$

   (d) $2x - \cos x = 0$, $[-\pi,\pi]$

9. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı aralıklarda ortalama değer teoreminin şartlarını sağladığını gösterip, teoremde adı geçen x_0 noktalarını bulunuz.

   (a) $f(x) = x^3$, $[-1,1]$

   (b) $f(x) = 3x^2 + 6x - 5$, $[-2,1]$

   (c) $f(x) = \sqrt{x}$, $[9,25]$

   (ç) $f(x) = x^{2/3}$, $[-1,8]$

   (d) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $[2,5]$

   (e) $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$, $[0,1]$

   (f) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $[1,2]$

   (g) $f(x) = \sin x$, $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

10. $f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \quad ise \\ -x^2 + 3x + c, & 0 < x < 1 \quad ise \\ mx + n, & 1 \leq x \leq 2 \quad ise \end{cases}$

    fonksiyonunun $[0,2]$ aralığında Ortalama Değer Teoreminin hipotezlerini gerçeklemesi için c, m, n ne olmalıdır? c, m, n nin bu değerleri için teoremde adı geçen x_0 noktasını bulunuz.

11. $f(x) = x^{2/3}$ fonksiyonunun $[-1, 27]$ aralığında Ortalama Değer Teoreminin koşullarını sağlamadığını fakat $[-1, 27]$ aralığında

$$f'(x_0) = \frac{f(27) - f(-1)}{27 - (-1)}$$

olacak şekilde bir x_0 noktasının varolduğunu gösteriniz.

12. $[a,b]$ aralığında f' bir sabit fonksiyon olsun. f nin $[a,b]$ üzerinde $f(x) = mx + n$ biçiminde bir fonksiyon olacağını gösteriniz.

13. $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında ortalama değerini $x_0 = \frac{a+b}{2}$ noktasında aldığını gösteriniz.

14. $f(0) = 3$ ve $\forall x \in R$ için $f'(x) = 0$ olsun. Her $x \in R$ için $f(x) = 3$ olacağını gösteriniz.

15. Rolle Teoreminden yararlanarak $\cot x = x$ denkleminin $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ de bir köke sahip olduunu gösteriniz.

[YG : $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında $f(x) = x\cos x$ fonksiyonuna Rolle Teoremini uygulayınız.)

16. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\forall x > 0$ için $x + \frac{1}{x} > 2$

(b) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ için $\tan x > x$

(c) $x > -1$ ve $0 < \alpha < 1$ için $(1 + x)^{\alpha} \leq 1 + \alpha x$

(ç) $x > 0$ için $\frac{x}{1 + x^2} < \arctan x < x$

(d) $x > 0$ için $\frac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x$

17. Aşağıdaki eşitliklerle tanımlanan eğrilerin konveks ve konkav olduğu aralıkları belirtiniz. Varsa dönüm noktalarını bulunuz.

(a) $y = 2x^2 + 1$ (b) $y = x^3 - 3x^2 + 4$

(c) $y = x^3 - x$ (d) $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$

(e) $y = \frac{x^4}{3} - 2x^2 + 4$ (f) $y = x^5 - 5x^4 - 240$

(g) $y = x + \frac{1}{x}$ (h) $y = \frac{x}{1 + x^2}$

(ı) $y = e^{-x^2}$ (i) $y = x\sqrt{x - 1}$

(j) $y = \sin 2x$

18. Aşağıdaki fonksiyonların karşılarında yazılı aralıklarda Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoreminin hipotezlerini sağladığını gösterip teoremde adı geçen x_0 noktalarını bulunuz.

(a) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2 + 2x$, $[-1,1]$

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $[1,2]$

19. $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ eğrisinin $x = 1$ de bir dönüm noktasına sahip olması için b ne olmalıdır? Burada b, c, d birer sabit sayıdır.

20. $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ eğrisinin bir dönüm noktasına sahip omadığını gösteriniz.

21. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ eğrisinin daima bir tek dönüm noktasına sahip olduğunu gösteriniz.

22. $n \in N^+$ olmak üzere, $y = x^n$ eğrisinin en fazla bir dönüm noktasına sahip olabileceğini gösteriniz.

23. f çift ve f nin grafiği $(0,\infty)$ üzerinde konveks ise $(-\infty,0)$ üzerinde de konveks midir?

24. $y = |x|$ eğrisini çiziniz. Bu eğri konveks midir?

4.8 BELİRSİZ ŞEKİLLER

Bir f fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki limiti araştırılırken, belirsiz şekiller denilen

$$\frac{0}{0}\ , \quad \frac{\alpha}{\alpha}\ , \quad \infty - \infty\ , \quad 0.\infty\ , \quad 0^0\ , \quad \infty^0\ , \quad 1^{\infty}$$

ifadelerinden biriyle karşılaşabiliriz. Bu tip limitler türev yardımıyla kolayca hesaplanabilirler.

$\frac{0}{0}$ Belirsizlik Hali

Bu belirsizlik hali aşağıdaki teorem yardımıyla kolayca hesaplanabilir.

TEOREM 4.9 (L' Hospital Kuralı) :

f ve g, a da sürekli, a nın bir delinmiş komşuluğunda türevli iki fonksiyon ve bu komşuluktaki her x için $g'(x) \neq 0$ olsun. Eğer

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0 \text{ ise}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dır.

İspat : f ve g fonksiyonları a noktasında sürekli olduklarından

$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ ve } g(a) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

dır. Buna göre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}$$

yazılabilir. $x > a$ olsun. Genelleştirilmiş Ortalama Değer Teoreminden

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

olacak şekilde bir $x_0 \in (a,x)$ vardır. Buna göre

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

olur. $x \to a$ için $x_0 \to a$ olacağından yukarıdaki ifade

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

biçiminde yazılabilir. $x < a$ için ispat benzer şekilde yapılır.

Eğer $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{0}{0}$ şeklinde ise, yani belirsizlik devam ediyorsa L' Hospital Kuralı bir kez daha uygulanır. $\dfrac{0}{0}$ belirsizlik halinden kurtuluncaya kadar kural tekrarlanabilir.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{2x^2-3x+1}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=\lim\limits_{x\to 1}2x^2-3x+1=0$ olduğundan $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{2x^2-3x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{4x-3}=\frac{1}{1}=1$$

olur.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : $\lim\limits_{x\to 0}x-\sin x=\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$ olduğundan $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$$

bulunur.

Teoremin ispatından da anlaşılacağı gibi, L' Hospital kuralı sağ ve sol taraflı limitler için de geçerlidir.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{\sin x}.\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{1+\tan^2 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{\sin x}.1$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\tan^2 x}{\cos x}=\frac{1+0}{1}=1$$

olur.

L' Hospital kuralı çeşitli şekillerde genişletilebilir. x sınırsız olarak büyütüldüğünde, yani $+\infty$ a yaklaştırıldığında $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ oranının $\dfrac{0}{0}$ belirsizlik şeklini aldığını kabul edelim. $t\neq 0$ olmak üzere $x=\dfrac{1}{t}$ yazılırsa $x\to+\infty$ için $t\to 0^+$ olacaktır. Bu durumda herhangi bir F fonksiyonu için $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=L$ ise $\lim\limits_{t\to 0}F\left(\frac{1}{t}\right)=L$ olacaktır. Buna göre şu sonucu ifade edebiliriz :

SONUÇ 4.4 : f ve g fonksiyonları bir M reel sayısından büyük her x noktasında türevlenebilir olsunlar. Ayrıca

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0$$

ve her $x>M$ için $g'(x)\neq 0$ olsun. Bu takdirde

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

dır.

İspat : $f\left(\frac{1}{t}\right)=F(t)$ ve $g\left(\frac{1}{t}\right)=\mathrm{G(t)}$ olsun. $t\to 0^+$ için $\dfrac{F(t)}{G(t)}$ ifadesi $\dfrac{0}{0}$ formundadır. Buna göre

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{F'(t)}{G'(t)}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

olur.

$x\to-\infty$ için $\dfrac{0}{0}$ belirsizliği elde edildiğinde aynı yöntemin uygulanabileceği açıktır.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos\frac{1}{x}}{\frac{x}{1+x^2}}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{x}{1+x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}.\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x^2)^2}{-x^2(1-x^2)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\cos\frac{1}{x}.\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x^2+1}{x^4-x^2}=1.1=1$$

bulunur.

$\frac{\infty}{\infty}$ Belirsizlik Hali

Bu belirsizlik halinde de L' Hospital kuralı geçerlidir. Zira $\frac{u}{v} = \frac{1}{v} : \frac{1}{u}$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği $\frac{0}{0}$ belirsizliğe dönüşür.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : Belirsizlik $\frac{\infty}{\infty}$ biçimindedir. Buna göre

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(\tan x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1+\tan^2 x}{\tan x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} \frac{\tan x}{(1+\tan^2 x)}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+\tan^2 x} = 1$$

olur.

$0.\infty$ Belirsizlik Hali

$u.v = \frac{u}{\frac{1}{v}}$ eşitliği yardımıyla $0.\infty$ belirsizliği $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ haline getirilebilir.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x)\cot x$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : $\cot x = \cos x : \sin x$ yazılarak

$$\lim_{x \to 0} (1 - \cos x)\cot x = \lim_{x \to 0} (1 - \cos x)\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} . \lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x} . 1$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

bulunur.

$\infty - \infty$ Belirsizlik Hali

Bu belirsizlik hali, $u - v = \frac{\frac{1}{v} - \frac{1}{u}}{\frac{1}{uv}}$ eşitliği yardımıyla $\frac{0}{0}$ belirsizlik haline dönüştürülebilir.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x \to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\lim_{x \to 0} \left(\cot x - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x.\cos x - \sin x}{x.\sin x} \qquad \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{\sin x + x\cos x} = - \lim_{x \to 0} \frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x}$$

$$= - \lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

bulunur.

0^0, ∞^0, 1^∞ Belirsizlik Halleri

x sonlu bir değere veya $\pm\infty$ değerlerine yaklaştığında $y = [u(x)]^{v(x)}$ biçimindeki fonksiyonlar bu belirsizlik hallerinden birini verebilir. Bu durumda her iki tarafın logaritması alınarak

$$\ln y = v(x) \ln u(x)$$

eşitliği elde edilir. Sağdaki ifadenin limiti, $0.\infty$ belirsizliğine sahip olur. Bu limit bilinen yolla hesaplanır.

$$\lim_{x \to a} \ln y = \lambda \quad \text{ise} \quad \lim_{x \to a} y = e^{\lambda}$$

olur.

ÖRNEK : $\lim\limits_{x \to 0^-} (1 - e^x)^{\sin x}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : 0^0 belirsizliği vardır. Logaritmasının limitini hesaplayalım.

$$\lim_{x \to 0^-} \ln(1 - e^x)^{\sin x} = \lim_{x \to 0^-} \sin x \ln(1 - e^x) \qquad (0.\infty)$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\ln(1-e^x)}{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{-e^x}{1-e^x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{\cos x} . \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin^2 x}{1-e^x} = 1. \lim_{x \to 0^-} \frac{2\sin x\cos x}{-e^x} = 0$$

olduğundan

$$\lim_{x \to 0^-} (1 - e^x)^{\sin x} = e^0 = 1$$

olur.

ÖRNEK : $\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : Bu limit ∞^0 formundadır. $y = (\cot x)^{1/\ln x}$ denirse

$$\ln y = \frac{1}{\ln x}.\ln\cot x \Rightarrow \lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln x}.\ln\cot x$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cot x)}{\ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\frac{-1}{\sin^2 x}}{\cot x}}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}.\frac{1}{\cos x} = -1.1 = -1$$

olur. O halde

$$\lim_{x\to 0} (\cot x)^{1/\ln x} = e^{-1}$$

dir.

ÖRNEK : $\lim_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$ limitini hesaplayınız.

Çözüm : $y = (1+3x)^{\frac{1}{x}}$ denirse $\ln y = \frac{\ln(1+3x)}{x}$ olur.

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{1+3x} = 3$$

olduğundan

$$\lim_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}} = e^3$$

olur.

4.9 DİFERENSİYELLER

$f : A \subset R \to R$ fonksiyonu $x \in A$ da türevlenebilir olsun. $\lim_{\Delta x\to 0} \varepsilon = 0$ olmak üzere

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)+\varepsilon$$

yazılabilir. Şu halde

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon.\Delta x$$

yazılabilir. Buradaki $f'(x)\ \Delta x$ terimine f fonksiyonunun sabit x noktasına ve değişkenin Δx artımına göre diferensiyeli denir. Bu diferensiyel dy veya $df(x)$ şeklinde gösterilir.

$f : A \to R$ fonksiyonu $y = f(x) = x$ şeklinde alırsak $dy = 1\ .\ \Delta x$ olur. Diğer taraftan $dy = dx$ olacağından $\Delta x = dx$ dir. O halde ifadede Δx yeter derece küçük ise

$$\Delta y = f'(x)dx$$

olur. Yani $dy = \Delta y$ dir. O halde $y = f(x)$ in diferensiyeli

$$dy = f'(x)dx$$

olur.

Diferensiyel türev ile dx in çarpımı olduğundan türev alma kaideleri burada aynen uygulanır. Örneğin

$$y = x^m \Rightarrow dy = mx^{m-1}\,dx$$

$$y = \cos x \Rightarrow dy = -\sin x\,dx$$

$$y = f(g(x)) \Rightarrow dy = f'(g(x))\ g'(x)dx$$

olur.

f fonksiyonunun ikinci diferensiyeli de şöyle hesaplanır :

$$d^2y = d(dy) = d\,(f'(x)dx) = (f''(x)dx^2 + 0.f'(x)dx$$

$$= f''(x)dx^2$$

Benzer olarak k. diferensiyel

$$d^k y = f^{(k)}(x)\,dx^k$$

olur.

Şimdi diferensiyel yardımıyla bazı sayıların yaklaşık değerlerinin nasıl bulunabileceğini görelim. Δx çok küçük ise

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \cong \Delta x.\ f'(x)$$

olduğunu biliyoruz. Buradan

$$f(x+\Delta x) \cong f(x) + \Delta x\ .\ f'(x)$$

yazılabilir.

ÖRNEK : $\sqrt{5}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz.

Çözüm : $f(x) = \sqrt{x}$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonu için

$$\sqrt{x+\Delta x} \cong \sqrt{x} + \Delta x.\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

yazılabilir. $x = 4$, $\Delta x = 1$ alınırsa

$$\sqrt{5} = \sqrt{4+1} \cong 2 + 1.\frac{1}{2.2} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} = 2,25$$

bulunur. Daha yaklaşık bir değer bulmak istenirse Δx daha küçük seçilmelidir. Örneğin $x = 4,484$ ve $\Delta x = 0,16$ seçilirse

$$\sqrt{5} \cong 2,2 + 0,16.\frac{1}{2.(2,2)} = 2,2 + 0,0363636 = 2,2363636$$

bulunur.

1. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^7+5x^3-6}{x^2-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\sin 3x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{\sin x}$ (ç) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\tan x}{x-\sin x}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x^2+2x-3}$ (e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$ (g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+4}-2}{x}$

(h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(1-\cos x)}{x-\sin x}$ (ı) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{2x-\pi}{\cos x}$

(i) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$ (j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-x-1}{x^2}$

(k) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^{15}-a^{15}}{x-a}$ (l) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$

(m) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{\sin x}$ (n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x-3^x}{x}$

(o) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4^x-3^x-1}{x-1}$ (ö) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x-x+1}{x^3-3x+2}$

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tanh x-\sinh x}{x^2}$ (r) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{b^x-1}$

(s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-b^x}{x}$ (ş) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$

(t) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$ (u) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[5]{x}}$

(ü) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\tan^2 x}$ (v) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

(y) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\tan 4x-12\tan x}{3\sin 4x-12\sin x}$

(z) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\pi-2\arctan x}{\ln(1+\frac{1}{x})}$

2. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln(\sin nx)}$ (b) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x+\ln x}{e^x+x}$

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(x+e^x)}{x}$ (d) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2+7x-1}{2x^2+5x+2}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1/x}{e^{1/x^2}}$ (f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\tan x}{\sec x+1}$

(g) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x}{\ln x}$ (h) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}$

(ı) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\ln x}{\ln(\ln x)}$

3. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1}{x^3}e^x$

(b) $\lim\limits_{x\to \infty} x\sin\dfrac{3}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 1} \ln x\ln(x-1)$

(ç) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi^2-4x^2)\tan x$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} x^{1/4}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(5\arctan\dfrac{\sqrt{x}}{5}-4\arctan\dfrac{\sqrt{x}}{4}\right)$

4. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

(c) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$

(ç) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{1-\cos x}-\dfrac{2}{\sin^2 x}\right)$

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$

(g) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$

(h) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

5. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} (1+\alpha x)^{\frac{\beta}{x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0^-} (1-2^x)^{\sin x}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$ (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{\sec x}$

(g) $\lim\limits_{x\to \infty} (\ln)^{\frac{1}{x}}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0^+} (x+\sin x)^x$

(ı) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ (i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x}$

(j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$ (k) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x}\right)^x$

6. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

7. $a_k > 0$ olmak üzere

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a_1^x+a_2^x+\dots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt[n]{a_1.a_2....a_n}$$

olduğunu gösteriniz.

8. $a, b > 0$ için

$$\lim_{x\to 0} (a^x+b^x-1)^{\frac{1}{x}} = a.b$$

olduğunu gösteriniz.

9. $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $f:(-1,1)\to R$ fonksiyonunun sürekli olması için a ne olmalıdır?

10. Aşağıdaki limitlerin hesaplanmasında L' Hospital Kuralının yararlı olmadığını gösteriniz. Bu limitleri başka yollardan hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$ (b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\sec x}{\tan x}$

11. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x=0 \text{ ise} \end{cases}$

$g(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x=0 \text{ ise} \end{cases}$ olsun.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 1$ fakat $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 2$ olduğunu gösteriniz. Bu sonuç L' Hospital Kuralı ile çelişir mi?

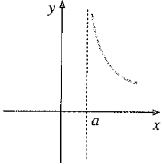
12. $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{(\tan x)^2}{\sin\left(\frac{4x^2}{\pi}\right)}, & x\neq 0 \text{ ise} \\ m, & x=0 \text{ ise} \end{cases}$$

fonksiyonunun $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ aralığında Ortalama Değer Teoreminin hipotezlerini sağlaması için m ne olmalıdır?

13. Aşağıdaki sayıların yaklaşık değerlerini bulunuz.

(a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt[3]{28}$ c) $\sqrt[4]{17}$

4.10 EĞRİ ÇİZİMLERİ



$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$ durumu

$A\subset R$ ve $f: A\to R$ bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun grafiği sonsuz çokluk- ta nokta içerebileceğinden, bu noktaları koordinat sisteminde işaretlemek mümkün olmayabilir. Bu nedenle fonksiyonun özelliklerinin (artan, konveks, vb) bilinmesi çizimi kolaylaştırır.

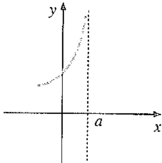
Eğri çizimlerine geçmeden önce, eğri çizimlerine yardımcı olan ve asimtot denilen doğru ve eğrileri tanıtmaya çalışalım.

$y=f(x)$ denklemiyle verilen f fonksiyonunun tanım veya görüntü kümelerinden en az biri sınırsız bir küme olsun.

1) Eğer

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty\,,\qquad \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty\,,\qquad \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ durumu

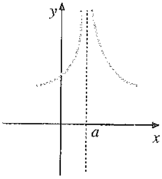
eşitsizliklerinden en az biri sağlanırsa $x=a$ doğrusu $y=f(x)$ eğrisinin bir düşey asimtotudur denir. Bu durumları açıklayan grafikler yanda çizilmiştir. Eğer

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$$

ise eğri $x=a$ doğrusuna yukarı ucunda iki taraflı teğet olacakmış gibi davranır.

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$$

ise, eğri yine $x=a$ doğrusuna alt ucunda iki taraflı teğet olacakmış gibi davranır.



$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$

Düşey asimtotlar, karşımıza daha çok $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ biçimindeki rasyonel fonksiyon- larda çıkar. Bu tip fonksiyonların düşey asimtotlarını bulmak için $Q(x)=0$ denk- lemi çözülür. Bu denklemin $x_1, x_2, \ldots, x_n$ kökleri $P(x)=0$ denkleminin kökleri değilse

$$x=x_1\,,\quad x=x_2\,,\ldots,\;x=x_n$$

denklemli doğrular $y=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ eğrisinin birer düşey asimtotudur. Eğer bu kök- lerden bazıları $P(x)=0$ denkleminin de bir kökü ise o zaman bu noktadaki limite bakmak gerekir.

ÖRNEK : $y=\dfrac{x^2+5x-14}{x^3-4x}$ eğrisinin düşey asimtotlarını bulunuz.

Çözüm :

$$x^3-4x=0\Rightarrow x(x^2-4)=0\Rightarrow x(x-2)(x+2)=0\Rightarrow$$

$$x_1=-2,\quad x_2=0,\quad x_3=2$$

olur. Bu köklerin $x^2+5x-14=0$ denkleminin kökü olup olmadığını araştıralım. $x=-2$ için $4-10-14=0\Rightarrow -20=0$ bulunur ki bu $x=-2$ nin kök olmadığını

gösterir. $x=0$ için $-14=0$ bulunur ki bu $x=0$ ın da kök olmadığını gösterir. Şu halde $x=-2$ ve $x=0$ denklemli doğrular birer düşey asimtotturlar. $x=2$ için $4+10-14=0\Rightarrow 0=0$ bulunur. Bu durumda $x=2$ hem payın hem de paydanın kökü olur. $x=2$ noktasındaki limite bakmak gerekir.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x-14}{x^3-4x}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{3x^2-4}=\frac{9}{8}$$

olduğundan $x=2$ düşey asimtot değildir.

ÖRNEK : $y=2^{\frac{1}{x}}$ eğrisinin düşey asimtotunu bulunuz.

Çözüm : $x=0$ düşey asimtot olabilir.

$$\lim_{x\to 0^-} 2^{\frac{1}{x}}=2^{-\infty}=0\,,\quad \lim_{x\to 0^+} 2^{\frac{1}{x}}=2^{\infty}=\infty$$

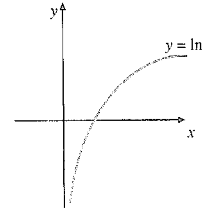
olduğundan $x=0$ bir düşey asimtottur.

ÖRNEK : $y=\ln x$ eğrisinin düşey asimtotunu bulunuz.

Çözüm :

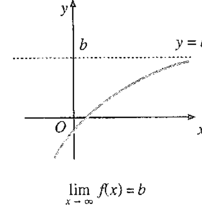
$$\lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$$

olduğundan $x=0$ düşey asimtottur. $y=\ln x$ in grafiği yanda verilmiştir.

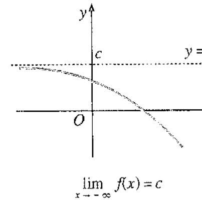


$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$ ise $y=b$ doğrusu bir yatay asimtottur denir. Benzer şekilde $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=c$ ise $y=c$ de bir yatay asimtottur.

Bu durumlar yandaki şekillerde gösterilmiştir.



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=c$

ÖRNEK : $y=\dfrac{3x^2+1}{x^2-4}$ eğrisinin yatay asimtotlarını bulunuz.

Çözüm :

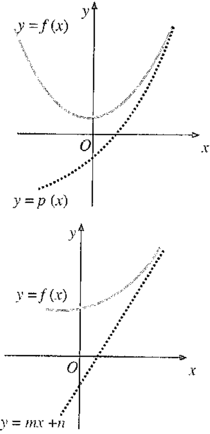
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2+1}{x^2-4}=3$$ olduğundan $y=3$ doğrusu yatay asimtot- tur.

ÖRNEK : $y=\dfrac{\ln x}{x}$ eğrisinin yatay asimtotunu bulunuz.

Çözüm :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$$

olduğundan $y=0$ doğrusu ($0x$– ekseni) eğrinin yatay asimtotudur.



ÖRNEK : $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ eğrisinin yatay asimtotunu bulunuz.

Çözüm :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{1}=\pm\infty$$

olduğundan yatay asimtot yoktur.

$y=f(x)$ eğrisi için

$$\lim_{x\to\infty}|f(x)-p(x)|=0 \quad \text{veya} \quad \lim_{x\to-\infty}|f(x)-p(x)|=0$$

olacak şekilde bir p(x) polinomu varsa $y=p(x)$ eğrisine $y=f(x)$ eğrisinin bir eğri asimtotudur denir. Eğer $p(x)$ polinomu $ax+b$ biçiminde ise bu asimtota eğik asimtot adı verilir.

ÖRNEK : $y=\dfrac{x^3+x}{x-1}$ eğrisinin eğri asimtotunu bulunuz.

Çözüm :

$$\frac{x^3+x}{x-1}=x^2+x+2+\frac{2}{x-1}$$

olduğundan $p(x)=x^2+x+2$ dir. $y=x^2+x+2$ eğri asimtottur. Çünkü

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{x^3+x}{x-1}-(x^2+x+2)\right|=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{2}{x-1}\right|=0$$

dır.

Bu örnekten de anlaşılacağı gibi, bir rasyonel fonksiyonun eğri veya eğik asimtotunu bulmak için, pay paydaya bölünür. Bölüm kısmı istenen $p(x)$ polinomudur.

Eğri asimtotlar içinde en çok kullanılanlar

$$g(x)=mx+n$$

tipindeki eğik asimtotlarıdır. Şimdi asimtotun bu tipte olması halinde m ve n katsayılarının nasıl hesaplanabileceğini görelim. Önce $g(x)=mx+n$ doğrusunun eğriye $x>0$ bölgesinde asimtot olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-g(x)]=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx-n]=0 \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-m\right]x-n=0$$

olmalıdır. Bu limitin mevcut olması için

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-m\right]=0$$

olması gerekir. Aksi takdirde limit mevcut olmaz. Çünkü ikinci çarpanın limiti $+\infty$ dur. Şu halde

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

olmalıdır. m için bulunan bu değer

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$$

eşitliğinde yerine konularak n bulunur. Buna göre

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-x\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\right]$$

olacaktır.

$x<0$ bölgesindeki asimtot için, benzer olarak,

$$m=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}\right]$$

bulunur.

ÖRNEK : $y=\sqrt{x^2-x}$ eğrisinin eğik asimtotunu bulunuz.

Çözüm :

$$m_1=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1$$

$$n_1=\lim_{x\to\infty}(y-mx)=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x-x^2}{\sqrt{x^2-x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1\right)}=-\frac{1}{2}$$

olduğundan, eğik asimtotlarından biri

$$y=x-\frac{1}{2}$$

dir.

Benzer şekilde m_2 ve n_2 hesaplanarak, ikinci eğik asimtotun

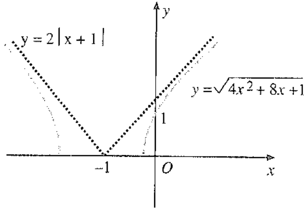
$$y=-x+\frac{1}{2}$$

olacağı gösterilebilir.

NOT : $a>0$ için $y=\sqrt{ax^2+bx+c}$ eğrisinin eğik asimtotu

$$y=\sqrt{a}\left|x+\frac{b}{2a}\right|$$

dir. $x\to\infty$ için $y=\sqrt{a}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$, $x\to-\infty$ için $y=-\sqrt{a}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)$ doğruları kullanılır. $a<0$ için eğrinin asimtotu yoktur.



ÖRNEK : $y = \sqrt{4x^2 + 8x + 1}$ eğrisinin eğik asimtotunu bulunuz.

Çözüm :

$$y = \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \sqrt{4}\left|x + \frac{8}{8}\right| = 2|x + 1|$$

eğik asimtottur. Bu asimtot ve eğri yanda gösterilmiştir.

Daha önce de belirttiğimiz gibi, bir eğrinin çizilebilmesi için o eğrinin çeşitli özelliklerinin bilinmesi gerekir. Şimdi bunların belli başlı olanlarını vermeye çalışalım. Bir eğriyi çizmek için şu yolu takip etmek yararlıdır.

1) Tanım kümesi bulunur.

2) Asimtotlar bulunur.

3) Eğrinin koordinat eksenlerini kestiği noktalar bulunur. Bunun için $y = f(x)$ eşitliğinde $x = 0$ yazılıp y bulunur. y nin bu değeri eğrinin $0y$– eksenini kestiği noktanın ordinatıdır. $y = 0$ konularak $f(x) = 0$ denklemi çözülür. Bu denklemin kökleri, eğrinin $0x$– eksenini kestiği noktaların apsisleridir.

4) Türevi alınıp işareti incelenir. Böylece fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklar bulunur. Maksimum ve minimum noktaları tespit edilir.

5) İkinci türev bulunur. İşareti incelenir. Böylece fonksiyonun konveks ve konkav olduğu aralıklar tespit edilir. Fonksiyonların büyük çoğunluğunda bu durum, çizim esnasında kendiliğinden oluştuğundan çoğu zaman bu maddenin incelenmesine gerek kalmaz. Bu nedenle çizimlerin birçoğunda bu maddeyi atlayacağız.

6) Değişim tablosu yapılır. Değişim tablosu yukarıdaki bilgilerin yeraldığı bir tablodur. Bu tabloya göre çizim yapılır.

7) Tabloya göre çizim yapılır.

Şimdi birkaç eğrinin grafiklerini çizelim.

ÖRNEK : $y = x^4 - 8x^2$ eğrisini çiziniz.

Çözüm :

1) $T = R = (-\infty, +\infty)$

2) Asimtot yok.

3) $x = 0$ için $y = 0$ dır. $y = 0$ için

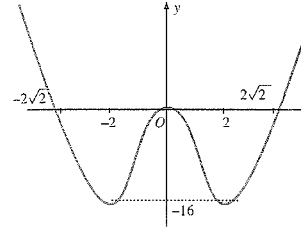
$x^4 - 8x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 8) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = -2\sqrt{2}\ ,\ x_4 = 2\sqrt{2}$

olur.

4) $y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4)$

$y' = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2$

bulunur. $x_1 = 0$ için $y_1 = 0$, $x_2 = -2$ için $y_2 = -16$, $x_3 = 2$ için $y = 16$ olur.



5) Değişim tablosu

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		-2		0		2		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
y	$+\infty$		0		-16		0		-16		0		$+\infty$

6) Grafik yanda çizilmiştir.

ÖRNEK : $y = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 2x + 1}$ eğrisini çiziniz.

Çözüm :

1) Tanım kümesi $R \setminus \{-1\}$ dir, zira $x^2 + 2x + 1 = 0$ denkleminin kökleri

$x_1 = x_2 = -1$ dir.

2) $x = -1$ düşey asimtot, $y = 1$ yatay asimtottur. Zira

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 4}{(x + 1)^2} = -\infty\ ,\quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{(x + 1)^2} = 1 \text{ dir.}$$

3) $x = 0$ için $y = -4$, $y = 0$ için

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\quad x_2 = 2$ dir.

Buna göre eğri $0y$– eksenini $(0,-4)$, $0x$– eksenini $(-2,0)$ ve $(2,0)$ noktalarında keser.

4) $$y' = \frac{2x(x^2 + 2x + 1) - (2x + 2)(x^2 - 4)}{(x + 1)^4} = \frac{(x + 1)(2x + 8)}{(x + 1)^4}$$

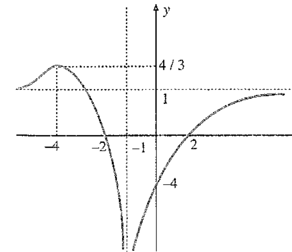
$$y' = 0 \Rightarrow 2x + 8 = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$$

bulunur. ($x + 1 = 0$ olduğunda payda da sıfır olacağından $x = -1$ in kök olarak alınmadığına dikkat ediniz.)

5) Değişim tablosu

x	$-\infty$		-4		-2		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	|	$-$	||	$+$	|	$+$	|	$+$	
y	1	↗	$\frac{4}{3}$	↘	0	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	-4	↗	0	↗	1

6) Grafik yanda çizilmiştir.



ÖRNEK : $y = x + \frac{1}{x}$ ve $y = \left|x + \frac{1}{x}\right|$ eğrilerini çiziniz.

Çözüm :

1) $T = R \setminus \{0\}$

2) $x = 0$ düşey asimtot, $y = x$ eğik asimtot

3) $x = 0$ da fonksiyon tanımsız olduğundan, eğri $0y$– eksenini kesmez.

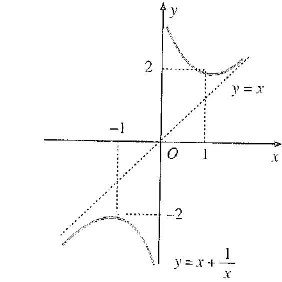
4) $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$, $y' = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$ olur.

Buna göre $y_1 = -2$, $y_2 = 2$ dir.

5) Değişim tablosu

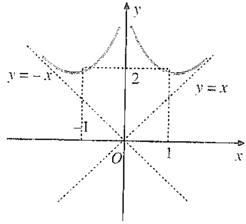
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

6) Grafik yanda çizilmiştir.



Bölüm 1 de anlatıldığı gibi

$y = |f(x)|$ in grafiği çizilirken $y = f(x)$ in grafiği çizilir, $0x$– ekseninin üstündeki parçaları aynen bırakılır. Eksenin altında kalan parçaların eksene göre simetriği alınır. Buna göre $y = \left|x + \frac{1}{x}\right|$ in grafiği yandaki şekilde verilen grafik gibidir.



$y = \left|x + \frac{1}{x}\right|$

ÖRNEK : $y = e^{\frac{x+1}{x}}$ eğrisini çiziniz.

Çözüm :

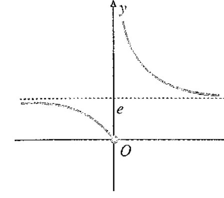
1) $T = R \setminus \{0\}$

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{\frac{x+1}{x}} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{\frac{x+1}{x}} = e^{-\infty} = 0$ olduğundan $x = 0$ bir düşey asimtottur.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{\frac{x+1}{x}} = e$ olduğundan $y = e$ yatay asimtottur.

3) $x = 0$ da tanımsız. $e^{\frac{x+1}{x}} > 0$ olduğundan $y = 0$ olamaz. Şu halde eğri ne $0x$– eksenini ne de $0y$– eksenini keser.

4) $y' = e^{\frac{x+1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) < 0$ olduğundan, fonksiyon tanımlı olduğu aralıkların herbirinde azalandır.



5) Değişim tablosu

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	e	↘	0 ‖ $+\infty$	↘	e

6) Grafik yanda çizilmiştir.

ÖRNEK : $y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ eğrisini çiziniz.

Çözüm :

1) $x^2 - 2x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1$ veya $x \geq 3$ olmalı

Tanım kümesi $T = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ olur.

2) $y = \sqrt{a}\left|x + \frac{b}{2a}\right| \Rightarrow y = |x - 1|$ eğik asimtot

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \sqrt{x^2 - 2x - 3} = +\infty$ dur.

3) $x = 0$ için fonksiyon tanımlı değil. $y = 0$ için

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 3$ olur.

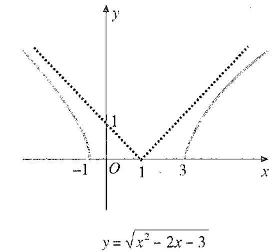
4) $y' = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x - 3}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$ $\quad y' = 0 \Rightarrow x = 1$ olur.

$x = 1$ de fonksiyon tanımlı olmadığından türev de yoktur. $x < 1$ için türev negatif, $x > 1$ için türev pozitif olacağından, $(-\infty, -1]$ aralığında $y' < 0$, $[3, +\infty)$ aralığında $y' > 0$ dır.

5) Değişim tablosu

x	$-\infty$		-1	1	3		$+\infty$
y'		−	(taralı)	(taralı)		+	
y	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

6) Grafik aşağıda çizilmiştir.



$y = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

ÖRNEK : $y = \ln \dfrac{x-1}{x+1}$ eğrisini çiziniz.

Çözüm :

1) $\dfrac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow x < -1$ veya $x > 1$ olmalı $T = R \setminus [-1,1]$

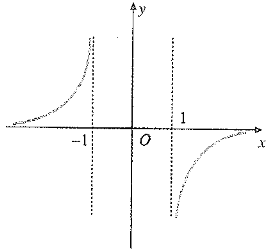
2) $\lim\limits_{x \to \infty} \ln \dfrac{x-1}{x+1} = \ln 1 = 0$ olduğundan $y = 0$ yatay asimtot

$\lim\limits_{x \to -1^-} \ln \dfrac{x-1}{x+1} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln \dfrac{x-1}{x+1} = -\infty$ olduğundan

$x = -1$ ve $x = 1$ birer düşey asimtottur.

3) $x = 0$ da fonksiyon tanımlı değil, $y = 0 \Rightarrow \dfrac{x-1}{x+1} = 1 \Rightarrow x - 1 = x + 1$ olur. Çözüm kümesi boştur. O halde fonksiyon her iki ekseni de kesmez.

4) $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)} > 0$ olduğundan fonksiyon tanımlı olduğu aralıklarda artandır.



5) Değişim tablosu

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+				+	
y	0	↗	$+\infty$		$-\infty$	↗	0

6) Grafik yanda verilmiştir.

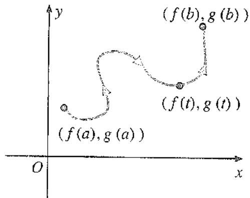
4.11 PARAMETRİK GÖSTERİMLER

xoy– düzleminde hareket eden bir parçacığı gözönüne alalım. Bu parçacığın çizmiş olduğu eğrinin (yörüngenin) denklemini x ve y cinsinden ifade etmek çok defa mümkün olmayabilir. Hareketlinin bulunduğu noktanın koordinatları t zamanının fonksiyonu olacağından, f ve g birer sürekli fonksiyon olmak üzere,

$x = f(t)$, $y = g(t)$

biçiminde ifade edilebilir. Buna göre, t bir aralığı taramak üzere

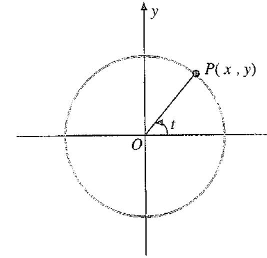
$x = f(t)$, $y = g(t)$



denklemleri bir eğri tanımlar. Bu denklemlere eğrinin parametrik denklemleri adı verilir. Eğer t nin taradığı aralık $[a,b]$, yani $a \le t \le b$ ise $(f(a), g(a))$ noktasına eğrinin başlangıç noktası, $(f(b),g(b))$ noktasına eğrinin bitim noktası denir. Böylece eğri üzerinde bir yön de tanımlanmış olur.

Birçok uygulamada t zamanı gösterir. Fakat bunun dışında başka şeyler de gösterilebilir. Örneğin bir açının ölçüsünü, bir noktadan uzaklığını da gösterebilir.

Şimdi bazı eğrilerin parametrik denklemlerini elde edelim.



ÖRNEK : Kartezyen koordinatlar sistemindeki denklemi $x^2 + y^2 = 1$ olan çemberin bir parametrik denklemini yazınız.

Çözüm : $P(x,y)$ noktasını $O(0,0)$ noktasına birleştiren doğru parçasının $0x$–ekseni ile yapmış olduğu açının ölçüsü t olsun. P nin koordinatları

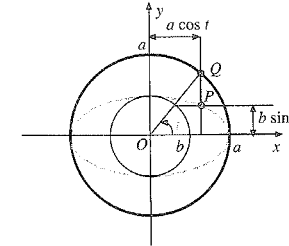
$x = \cos t$, $y = \sin t$

olacaktır.

$P(x,y)$ noktasının çemberi çizmesi için $A(1,0)$ noktasından hareket edip yine aynı noktaya geldiğini düşünelim. Bu durumda t parametresi 0 dan 2π ye kadar değişir. Şu halde çemberin parametrik gösterimi

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

olacaktır.



ÖRNEK : Kartezyen koordinat sistemindeki denklemi $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ olan elipsin bir parametrik gösterimini yazınız.

Çözüm : $O(0,0)$ merkezli ve a yarıçaplı asal çemberi ve b yarıçaplı yedek çemberi çizelim. Elips üzerindeki $P(x,y)$ noktasından $0x$– eksenine çizilen dikdoğrunun uzantısı asal çemberi Q da kessin. OQ ile $0x$– ekseninin oluşturduğu açının ölçüsüne t denirse

$x = a \cos t$, $y = b \sin t$

olur. P tüm elipsi dolandığında t, 0 dan 2π ye kadar değişir. O halde sözkonusu elipsin parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

olur.

ÖRNEK : Bir yatay doğru üzerinde kaynaksızın yuvarlanan a yarıçaplı bir çember üzerinde alınan bir P noktasının geometrik yerinin (yörüngesinin) denklemini yazınız.

Çözüm : Çemberin yuvarlandığı doğru $0x$– ekseni olsun.

$P(x,y)$ noktasının hareketin başlangıç anında orijinde bulunduğunu kabul edelim. P noktasıyla çemberin M merkezini birleştiren MP doğru parçası ve M noktasını çemberin Q değme noktasına birleştiren MQ doğru parçasının oluşturduğu PMQ açısının ölçüsü t olsun.

$|\widehat{PQ}| = at$, $|OQ| = |PQ| = at$ olduğundan

$$x = |OK| = |OQ| - |KQ| = |OQ| - |PN| = at - a\sin t$$

$$= a(t - \sin t)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$y = |PK| = |NQ| = |MQ| - |MN| = a - a\cos t$$

$$= a(1 - \cos t)$$

olur. Buna göre sikloid denilen bu eğrinin parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

olur.

ÖRNEK : r yarıçaplı C merkezli bir çember $O(0,0)$ merkezli, $a = 4r$ yarıçaplı bir çember içinde kaymaksızın yuvarlanmaktadır. Yuvarlanan bu çember üzerinde işaretlenen bir $P(x,y)$ noktasının çizmiş olduğu eğrinin denklemini yazınız.

Çözüm : P noktasının başlangıç anında A noktasında bulunduğunu kabul edelim. İki çemberin merkezlerini birleştiren doğrunun $0x$– ekseniyle oluşturduğu açının ölçüsü t, $\widehat{MCP}$ açısının ölçüsü α olsun.

$$|\widehat{MP}| = |\widehat{MA}|$$

olacağından

$$4rt = \alpha r \Rightarrow \alpha = 4t$$

bulunur. Diğer taraftan

$$m(\widehat{LCP}) + \alpha = \frac{\pi}{2} + t$$

olacağından

$$m(\widehat{LCP}) = \frac{\pi}{2} + t - \alpha = \frac{\pi}{2} + t - 4t = \frac{\pi}{2} - 3t$$

dir.

$P(x,y)$ noktasının x ve y koordinatlarını hesaplayalım.

$$x = |OK| = |OH| + |HK| = |OH| + |LP|$$

$$= 3r\cos t + r\sin(\widehat{LCP})$$

$$= 3r\cos t + r\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3t\right)$$

$$= 3r\cos t + r\cos 3t$$

$$= r(3\cos t + 4\cos^3 t - 3\cos t)$$

$$= 4r\cos^3 t = a\cos^3 t$$

bulunur.

$$y = |PK| = |LH| = |CH| - |CL|$$

$$= 3r\sin t - r\cos(\widehat{LCP})$$

$$= 3r\sin t - r\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3t\right) = 3r\sin t - r\sin 3t$$

$$= r(3\sin t - 3\sin t + 4\sin^3 t) = 4r\sin^3 t = a\sin^3 t$$

olur. Şu halde Astroid (yıldız eğrisi) denilen bu eğrinin parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

olacaktır. Bu denklemlerden

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \cos t \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \cos^2 t ,$$

$$\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{1}{3}} = \sin t \Rightarrow \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = \sin t$$

yazılabileceğinden

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{3/2} + \left(\frac{y}{a}\right)^{3/2} = 1$$

olur. Şu halde Astroidin kartezyen koordinat sistemindeki denklemi

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

olacaktır.

1. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin asimtotlarını bulunuz.

(a) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ (b) $y=\dfrac{x^2-3x}{x^2-4}$

(c) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}$ (ç) $y=2^{-1/x^2}$

(d) $y=\dfrac{x}{1+|x|}$ (e) $y=\dfrac{x^3}{x-1}$

(f) $y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$ (g) $y=\sqrt{x^2-4x}$

2. $y=\dfrac{x^2}{x^2-mx-4}$ eğrisinin düşey asimtotları arasındaki uzaklığın 5 birim olması için m ne olmalıdır?

3. $y=\dfrac{x^2}{x^2+2mx+4}$ eğrisinin düşey asimtota sahip olmaması için m ne olmalıdır?

4. $y=\dfrac{1}{1-e^x}$ eğrisinin asimtotları hangi noktada kesişir?

5. $y=\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-4x+4}$ eğrisi koordinat eksenlerini hangi noktalarda keser?

6. $y=\dfrac{x^2-bx+4}{x^2+4}$ eğrisinin $0x-$ eksenini kesmemesi için b ne olmalıdır?

7. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin grafiklerini çiziniz.

(a) $y = x^2(x-1)$ (b) $y = x^6 - x^2$

(c) $y = 3x - x^3$ (ç) $y=\dfrac{x}{x-1}$

(d) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ (e) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

(f) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$ (g) $y=\dfrac{x^2+x-1}{(x-1)^2}$

(h) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$ (ı) $y=\dfrac{4x}{(x-1)^2}$

(i) $y=\dfrac{2}{x-3}$ (j) $y=\dfrac{1}{x^2-4}$

(k) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ (l) $y=\dfrac{3}{(x-1)^2}$

(m) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ (n) $y=x-\dfrac{1}{x}$

(o) $y=x^2+\dfrac{2}{x}$ (ö) $y=\dfrac{x^3-8}{x^2}$

(p) $y=\dfrac{x^2+2}{x^2+1}$ (r) $y=\dfrac{x}{1+|x|}$

(s) $y=\dfrac{2x^2}{1+|x|}$ (ş) $y=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}$

(t) $y=\sqrt{2x-4}$ (u) $y=\sqrt{x^2-6x}$

(ü) $y=x\ln x$ (v) $y=\ln\left(\dfrac{x^2-4}{1-x^2}\right)$

(y) $y=x\sqrt{1-x^2}$ (z) $y=e^{-x^2}$

8. $y = 2x\arctan x$ eğrisinin eğik asimtotunun denklemini bulunuz.

9. (x_1,y_1), (x_2,y_2) noktalarından geçen doğrunun parametrik denklemini yazınız.

10. b yarıçaplı bir merkezil çembere içten teğet ve yarıçapı $a(a < b)$ olan bir çember veriliyor. Küçük çember büyük çembere teğet olacak şekilde hareket ettirildiğinde, küçük çember üzerindeki sabit bir nokta bir eğri çizer. Hiposikloid denilen bu eğrinin denkleminin

$$x = (a-b)\cos t + b\cos\frac{a-b}{b}t$$

$$y = (a-b)\sin t - b\sin\frac{a-b}{b}t$$

olacağını gösteriniz. $b = 4a$ olması durumunu inceleyiniz.

1. $y = x - x^2$ eğrisine $x = 0$ absisli noktasından çizilen teğetin $0x-$ ekseniyle yapmış olduğu açının ölçüsünü bulunuz.

2. $x^m y^n = a^{m+n}$ eğrisine (x_0,y_0) noktasından çizilen teğetin denkleminin

$$my_0(x-x_0) + n\,x_0\,(y-y_0) = 0$$

olacağını gösteriniz.

3. $4x^2 + y^2 = 72$ eğrisinin (4,4) noktasında kesişen teğetlerinin denklemini yazınız.

4. Bir f fonksiyonu için

$$f'(x) = (x-1)^2(x-2)(x-4)$$

dir. f fonksiyonunun yerel ekstremum ve dönüm noktalarını bulunuz.

5. f çift ve f nin grafiği $(0,+\infty)$ üzerinde konveks ise $(-\infty,0)$ üzerinde de konveks midir?

6. Belli bir ilacın etkisinde tutulan bir bakteri topluluğunun gelişim fonksiyonu, t saat olarak zamanı, y de sayıyı göstermek üzere

$$y = -(10x)^2 + 10^3x + 2.10^4$$

ile verilmektedir.

a) Başlangıçta topluluğun kaç üyesi vardı?

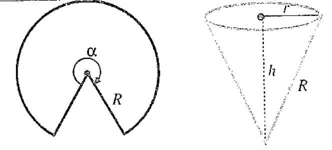
b) Kaçıncı saatten sonra toplulukta azalma başlar?

c) Kaç saat sonra topluluktaki tüm bakteriler ölür?

7. R yarıçaplı bir küreyi içinde bulunduran bir dairesel dik koninin hacmi en az kaç br^3 olur?

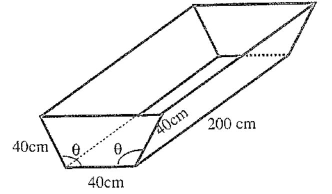
8. Hacmi V olan bir koninin yanal yüzey alanı en az kaç birimdir? [Taban yarıçapı r, yüksekliği h olan koninin yanal yüzey alanı $S = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$ dir.]

9.



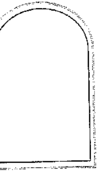
Merkez açısının ölçüsü α, yarıçapı R olan bir daire diliminden, taban yarıçapı r, yüksekliği h olan bir koni yapılıyor. Bu koninin maksimum hacimli olması için α ne olmalıdır?

10.



Şekildeki hamur teknesinin boyutları üzerine yazılmıştır. Bu teknenin hacminin maksimum olması için θ kaç derece olmalıdır?

11. Şekildeki pencere bir dikdörtgen ile bir yarımçemberden oluşmuştur. Pencerenin çevresi $40(\pi + 4)$ cm olduğuna göre, pencerenin en fazla ışık geçirmesi için boyutları ne olmalıdır?



12. Aşağıdan yukarıya doğru atılan bir cismin yüksekliği S metre ve t saniye olmak üzere

$$S = 112 + 96t - 16t^2$$

ile veriliyor.

a) $t = 0$ anındaki ivmesini bulunuz.

b) Çıkabileceği maksimum yüksekliği hesaplayınız.

c) $S = 0$ için ivmesini bulunuz.

13. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$ limitini hesaplayınız.



G. W. LEIBNIZ (1646 – 1716)

1 Temmuz 1646 da Leibzig'de doğdu. 6 yaşında ahlak ilmi öğretmeni olan babasını kaybetti. Leibzig'de bir okula devam etti. Babasının kütüphanesindeki kitapları sürekli okuyordu. Özelikle Tarih bilgilerini hevesle öğreniyordu. 8 yaşında Latince öğrenmeye başladı. 12 yaşına geldiğinde Latince şiir yazacak kadar bu dili ilerletti. Daha sonra kendi gayretiyle Yunanca öğrendi. Bu devirde zihinsel faaliyetleri çok iyi işliyordu.

15 yaşına gelmeden, klasiklerin ve hiristiyan büyüklerinin ortaya koyduğu İskolastik mantığı düzeltmek için "Characteristica Universalis" adlı çalışmasını yayınladı. İngiliz matematikçisi Boole'nin de söylediği gibi, sembolik mantık Leibniz'in Characteristica'sının bir parçasıdır.

Leibniz 15 yaşında Leibzig Üniversitesine bir hukuk öğrencisi olarak girdi. Fakat tüm zamanını hukuka vermiyordu. İlk iki yıl birkaç felsefe kitabı okudu. Zamanın filozofları olan Kepler, Galile ve Descartes'in keşfettiği yeni dünya hakkında bilgiler edindi. Sonuçta matematik öğrenmeden bu ilimleri kavramanın imkansız olduğunu gördü. 1663 yılının yazını Jena Üniversitesinde geçirdi. Orada tanınmış bir matematikçi olan Erhard Weigel'in derslerini izledi.

Leibzig'de dönünce yine hukuka başladı. 1666 yılında hukuk alanında Doktora sınavına hazırdı. Bu dönemde Newton diferensiyel ve integral hesap ile ilgili düşüncelere dalmıştı. Çok genç olması ve tüm profesörlerden daha iyi hukuk bilmesinin yarattığı kıskançlık nedeniyle ona doktor ünvanı verilmedi.

Leibzig Üniversitesinde egemen olan tutucu düşünceden nefret eden Leibniz, doğduğu şehri bırakıp Nürnberg'e gitti.

Kasım 1666 yılında Alfdorf Üniversitesi ona doktor ünvanı verdi. Leibniz hukuk derslerinin düzeltilmesi için birçok yazılar yazdı.

1666 dan itibaren olasılık kuramı ile ilgilenmeye başladı. Bu sıralar hukuk öğrencisiydi ama olasılık kuramı hakkında eserler veriyordu.

Matematik Leibniz'in zekasının fışkırdığı bir sahadır. Bundan başka hukuk, tarih, din, siyaset, mantık, metafizik ve felsefe konularında çok sayıda eser vermiştir. Bundan dolayı kendisine "evrensel deha" denilmektedir. Onun matematiğe en büyük katkısı diferensiyel ve integral konusundaki sürekliliği, olasılıklar kuramındaki süreksizliği analize sokmasıdır. Zaten Newton'la anlaşamadığı konu da olasılık kuramıdır. Soyut olasılıklar kuramının öncüsü Leibnizdir.

Leibniz matematik ve mantık alanında çağının iki yüzyıl ilerisindeydi. Diferensiyelin geometrik yorumunu verdi. Bu matematiğe en büyük hizmetti.

Süreklilik ve süreksizlik ya da analitik ve olasılıklar gibi, matematik düşüncenin iki karşıt alanında fikir yürütmüş bir matematikçi daha olmamıştır. Leibniz'in olasılıklar kuramıyla ilgili çalışmaları yaşamı süresince değerlendirilememiştir. Ancak 19. yüzyılda Boole'nin çalışmalarıyla bu eserler hakettiği değeri kazanmıştır.

Leibniz son 40 yılını matematikten uzak, Brunswick ailesine hizmette geçirdi. Eğer tüm hayatını matematikle geçirseydi, bu gün çok farklı bir yerde olacaktı.

Ne hazin bir çağda yaşıyoruz. Bir önyargıyı ortadan kaldırmak, bir atomu parçalamaktan daha güç.

Albert EINSTEIN

5 BELİRSİZ İNTEGRALLER

5.1 BELİRSİZ İNTEGRAL

Bir bakıma türev alma işleminin tersi olan integral alma işlemi, hemen hemen tüm bilim dallarının çok ihtiyaç duyduğu matematik konularının başında gelir. Biz bu bölümde temel fen ve iktisat derslerinde karşılaşılması muhtemel olan, bütün integral türleri için çözüm yollarını detaylı olarak ele alacağız.

TANIM :

$f(x)$ tanımlı olduğunda

$$F'(x) = f(x)$$

bağıntısını sağlayan bir F fonksiyonu varsa bu F fonksiyonuna f nin bir **antitürevidir** denir.

ÖRNEK : $f(x) = 2x$ biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun bazı antitürevlerini bulunuz.

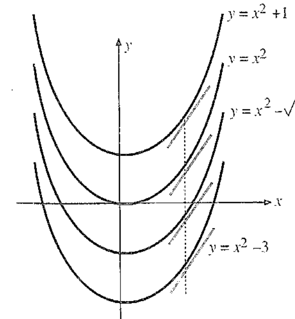
Çözüm :

$$F(x) = x^2 + 1\ , \qquad G(x) = x^2 - 3\ , \qquad H(x) = x^2 - \sqrt{5}$$

olacağından

$$f(x) = x^2 + 1\ , \qquad G(x) = x^2 - 3\ , \qquad H(x) = x^2 - \sqrt{5}$$

biçiminde tanımlanan F, G ve H fonksiyonları f nin birer antitürevidir. Bunlar gibi daha sonsuz çoklukta antitürev bulunabilir. Bu antitürevlerin ortak özellikleri, aynı apsisli noktalardaki teğetlerinin paralel olmalarıdır.



TEOREM 5.1 : $I = (a,b)$ açık aralığında $F'(x) = f(x)$ ise, I üzerinde f nin herbir G antitürevi, C bir keyfi sabit olmak üzere

$$G(x) = f(x) + C$$

biçimindedir. Başka bir deyişle, iki antitürev arasındaki fark sabittir.

İspat : Türev konusunda görüldüğü gibi, her $x \in I$ için $g'(x) = 0$ ise, $g(x) = C$, yani sabit olur. G de bir antitürev olduğundan $G'(x) = f(x)$ dir. Buna göre, I üzerinde

$$(G(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$$

olur. O halde $G(x) - F(x)$ sabittir. Bu sabite C denirse

$$G(x) - F(x) = C$$

buradan da

$$G(x) = F(x) + C$$

bulunur.

Böylece f nin herhangi bir F antitürevi bilindiğinde, tüm antitürevler $f(x) + C$ biçiminde olacaktır.

> **TANIM :**
>
> f bir fonksiyonun türevi olsun. f nin tüm antitürevlerinin sınıfına f fonksiyonunun x değişkenine göre belirsiz integrali denir.
>
> $$\int f(x)\,dx$$
>
> ile gösterilir. $\int$ simgesine integral işareti, $f(x)$ ifadesine integrant, x'e de integrasyon değişkeni adı verilir.

Bu tanıma göre f fonksiyonunun bir antitürevi F ise,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

olacaktır. Şu halde,

$$F'(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + C$$

olur. İntegrasyonu sabiti denilen bu C sayısı herhangi bir sabittir.

$\int f(x)dx$ integralini hesaplamak demek f nin antitürevlerinin sınıfını bulmak demektir.

ÖRNEK : $\int 3x^2\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $(x^3)' = 3x^2$ olacağından

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C$$

olur.

Bir integral alma işleminde, integrali alınacak olan ifadenin hangi fonksiyonun türevi olduğu görülebiliyorsa, bu fonksiyona keyfi bir C sabiti eklemek suretiyle integral alınmış olur. Buna göre, türev konusunda gördüğümüz bağıntılar yardımıyla aşağıdaki integral formülleri yazılabilir :

1) $\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$	8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
2) $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	9) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
3) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0)$	10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4) $\int e^x\,dx = e^x + C$	11) $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$
5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	12) $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
6) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$	13) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$
7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$	14) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + C$

Şimdi belirsiz integrallere ait bazı özellikleri inceleyelim.

Özellik 1 : Her a reel sayısı için

$$\int a\,f(x)dx = a\int f(x)\,dx$$

dir. Yani integral içindeki sabit çarpan integralin dışına alınabilir. Bu özelliğin sağlandığını Bölüm 4 deki

$$\frac{d}{dx}[aF(x)] = a\frac{d}{dx}F(x)$$

türev alma kuralını kullanarak gösterebiliriz.

Özellik 2 : Sonlu sayıda terimlerin toplamından oluşan bir ifadenin integrali, bu terimlerin ayrı ayrı integrallerinin toplamına eşittir :

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

dir. Özellik 1 ve 2 gözönüne alınırsa, a ve b gibi reel sayılar olmak üzere,

$$\int [a\, f(x) + b g(x)]\, dx = a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx$$

yazılabilir.

ÖRNEK :

$$I = \int (6x^2 - 4x + 3)\, dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$I = 6\int x^2 dx - 4\int x\, dx + 3\int 1.dx = 6\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 3x + C$$

$$= 2x^3 - 2x^2 + 3x + C\ .$$

ÖRNEK :

$$I = \int \left(2\sin x + 10\sqrt{x^3} + \frac{5}{x}\right) dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$I = 2\int \sin x\, dx + 10\int x^{3/2} dx + 5\int \frac{1}{x} dx$$

$$= 2(-\cos x) + 10\frac{x^{5/2}}{5/2} + 5\ln|x| + C$$

$$= -2\cos x + 4\sqrt{x^5} + 5\ln|x| + C\ .$$

ÖRNEK :

$$I = \int \left(\frac{4}{\cos^2 x} + 3e^x - \frac{2}{1+x^2}\right) dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$I = 4\int \frac{1}{\cos^2 x} dx + 3\int e^x dx - 2\int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= 4.\tan x + 3e^x - 2\arctan x + C$$

ÖRNEK :

$$I = \int \left(\frac{5x^2 - 6x + 3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$I = \int \left(\frac{5x^2}{\sqrt{x}} - \frac{6x}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx$$

$$= 5\int x^{3/2} dx - 6\int x^{1/2} dx + 3\int x^{-1/2} dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= 5\frac{x^{5/2}}{5/2} - 6\frac{x^{3/2}}{3/2} + 3\frac{x^{1/2}}{1/2} + 2\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$$

$$= 2x^{5/2} - 4x^{3/2} + 6x^{1/2} + 2\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$$

$$= 2\sqrt{x^5} - 4\sqrt{x^3} + 6\sqrt{x} + 2\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C$$

olur.

ÖRNEK :

$$I = \int \left(3\sinh x + 2e^x + \frac{5}{\sin^2 x}\right) dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$I = 3\int \sinh x dx + 2\int e^x dx + 5\int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= 3\cosh x + 2e^x - 5\cot x + C$$

olur.

ÖRNEK :

$$\int (x^3 + 3^x)\, dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$I = \int x^3 dx + \int 3^x dx = \frac{x^4}{4} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

bulunur.

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int (4x^3 - 4x + 3)dx$

(b) $\int (1 - 2x^2 + 3x^3)\, dx$

(c) $\int \left(\frac{6}{x^2} + 2x^{3/2} - 1\right) dx$

(ç) $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{\sqrt[4]{x^3}}\right) dx$

(d) $\int \frac{2x^4 - 3x^3 + 5}{3x^2}\, dx$

(e) $\int \left(\sin x + \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}}\right) dx$

(f) $\int \frac{x\sqrt{1 + x^2} + 4}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx$

(g) $\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{4}{\sin^2 x}\right) dx$

(ğ) $\int \sqrt{x}\,(1 - \sqrt[3]{x})dx$

(h) $\int (x^2 - 1)(x - 1)^3\, dx$

(ı) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{4}{\sqrt{1 + x^2}}\right) dx$

(i) $\int (3\cosh x - 2\cos x)\, dx$

(j) $\int (x + 1)^4\, dx$

(k) $\int \frac{dx}{(x - 5)^{10}}$

(l) $\int \sqrt{x}(1 - x)\, dx$

(m) $\int (2^x + x^2)\, dx$

(n) $\int \frac{(3x + 2)^2}{\sqrt{x}}\, dx$

(o) $\int (2^x)^3\, dx$

(ö) $\int (x^3)^{-2}\, dx$

(p) $\int (x - 2)^3\, dx$

(r) $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\, dx$

(s) $\int x(x + a)(x + b)dx$

(ş) $\int (a + bx^3)\, dx$

(t) $\int (a^{2/3} - x^{2/3})\, dx$

(u) $\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}}\, dx$

(ü) $\int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}\, dx$

(v) $\int \tan^2 x\, dx$

(y) $\int 3^x e^x\, dx$

(z) $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)\, dx$

2. $\int \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin^2 x + C_1$

$\int \sin x \cos x dx = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C_2$

eşitliklerinin doğru olduğunu gösteriniz.

$F_1(x) = \frac{1}{2}\sin^2 x, \qquad F_2(x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x$

için $F_1(x) - F_2(x)$ ifadesini hesaplayınız.

3. $F_1(x) = \frac{1}{1 - x} \qquad F_2(x) = \frac{x}{1 - x}$

fonksiyonlarının her ikisinin de

$f(x) = \frac{1}{(1 - x)^2}$

fonksiyonunun birer antitürevi olduğunu gösteriniz.

$F_1(x)$ ile $F_2(x)$ arasında hangi bağıntı vardır?

4. $\int x^2 f(x)dx = \frac{x^3}{9}(3\ln x - 1) + C$

eşitliğini sağlayan $f(x)$ ifadesini bulunuz.

5. $\int x^2 e^x\, dx = (Kx^2 + Lx + M)e^x + C$

eşitliğini sağlayan K, L, M sayılarını bulunuz.

6. $\int x^5 \ln x dx = \frac{x^6}{36}(A\ln x + B) + C$

eşitliğini sağlayan A, B, C sayılarını bulunuz.

7. $f'(x) = 2x + 3$ ve $f(1) = 2$

bağıntısını sağlayan $f(x)$ ifadesini bulunuz.

8. Türevi kendisinin iki katına eşit olan pozitif bir f fonksiyonu için $f(0) = 1$ olduğu biliniyor. $f(x)$ ifadesini hesaplayınız.

9. Her noktasındaki teğetinin eğimi o noktanın apsisinin iki katına eşit olan ve $(-1{,}4)$ noktasından geçen eğrinin $x = 1$ apsisli noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

10. Her noktadaki teğetinin eğimi, o noktanın apsisi ile ordinatı çarpımına eşit olan ve $(0{,}2)$ noktasından geçen eğrinin denklemini bulunuz.

11. Türevi kendisine eşit olan negatif bir f fonksiyonu için $f(-1) = -1$ ise, $f(0)$ nedir?

12. İvmesi sabit a değerine eşit olan bir hareketlinin $t = 0$ anındaki hızı v_0, başlangıçtan uzaklığı s_0 olsun. Bu hareketlinin t anındaki hızının

$v = v_0 + at,$

aldığı yolun

$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

olacağını gösteriniz.

13. Hareket halindeki bir aracın frenine basıldığında, araç tamamen duruncaya kadar 40 metrelik bir fren izi meydana geliyor. Frene basıldığında hareketin ivmesinin 20m/sn^2 olduğu bilindiğine göre, frene basıldığı an aracın hızı kaç km/saattir?

14. Yüksek bir kuleden serbest bırakılan bir cismin t anındaki v hızını ve S yolunu veren formülleri bulunuz.

(Cismin kütlesi m, yerçekim ivmesi g olduğunda, cisme etki eden kuvvetin $F = mg$ olduğu bilinmektedir.)

Bazı durumlarda, integrali alınacak ifadenin (integrantın) hangi ifadenin türevi olduğunu görmek, çok zor olabilir. Bunun için bazı integrasyon yöntemleri geliştirilmiştir. Şimdi bu yöntemleren en kullanışlı olanlarını vereceğiz.

5.2.1 DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME YÖNTEMİ

φ sürekli türevlere sahip bir fonksiyon olmak üzere $x = \varphi(t)$ dönüşümü yapıldığında, $dx = \varphi'(t)\,dt$ olacağından

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

integrali bulunur. İntegral hesaplandıktan sonra $t = \varphi^{-1}(x)$ dönüşümü ile tekrar x değişkenine dönülür. Bu nedenle φ fonksiyonu, tersi olan bir fonksiyon olmalıdır.

ÖRNEK :

$$\int (1-4x)^6\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm : $1 - 4x = t$ denirse, $-4dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{1}{4}dt$ olur. Bu değerler integralde yerine yazılırsa

$$\int (1-4x)^6\,dx = \int t^6\left(-\frac{1}{4}\right)dt = -\frac{1}{4}\cdot\frac{t^7}{7} + C$$
$$= -\frac{1}{28}(1-4x)^7 + C$$

bulunur.

ÖRNEK :

$$\int \frac{(4+\ln x)^5}{x}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm : $4 + \ln x = t$ denirse $\frac{1}{x}dx = dt$ olur. Bu değerler integralde yerine konursa

$$\int \frac{(4+\ln x)^5}{x}\,dx = \int t^5\,dt = \frac{1}{6}t^6 + C = \frac{1}{6}(4+\ln x)^6 + C$$

olur.

ÖRNEK : $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $x = t^2$ denirse, $dx = 2t\,dt$ olacağından

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{e^t}{t}2t\,dt = 2\int e^t\,dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$$

olur.

ÖRNEK : $\int \tan x\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ise $\cos x = t$ denirse $-\sin x\,dx = dt$ olacağından

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int -\frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int \frac{x^4}{1+x^{10}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $x^5 = t$ denirse, $5x^4dx = dt$ olacağından

$$\int \frac{x^4}{1+x^{10}}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{5}\arctan t + C = \frac{1}{5}\arctan x^5 + C$$

olur.

ÖRNEK : $\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$u(x) = t$ denirse, $u'(x)\,dx = dt$ olur. Buna göre

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|u(x)| + C$$

bulunur. O halde

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + C$$

eşitliği, türevlenebilen her fonksiyon için doğrudur.

ÖRNEK : $\int \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : Paydanın türevi $(\cos x + \sin x)' = -\sin x + \cos x = -(\sin x - \cos x)$ olduğundan, yukarıdaki formülden

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\cos x + \sin x}\, dx = -\int \frac{-(\sin x - \cos x)}{\cos x + \sin x}\, dx = -\ln|\cos x + \sin x| + C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\alpha \neq -1$ olmak üzere $\int [u(x)]^{\alpha} u'(x)\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $u(x) = t$ denildiğinde $u'(x)\, dx = dt$ olacağından

$$\int [u(x)]^{\alpha} u'(x)\, dx = \int t^{\alpha}\, dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C = \frac{1}{\alpha+1}[u(x)]^{\alpha+1} + C$$

bulunur. O halde türevlenebilen u fonksiyonu için

$$\int [u(x)]^{\alpha} u'(x)\, dx = \frac{1}{\alpha+1}[u(x)]^{\alpha+1} + C$$

olur.

ÖRNEK : $\int \sqrt{\sin^5 x}\, \cos x\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\int (\sin x)^{5/2} \cos x\, dx = \frac{2}{7}(\sin x)^{7/2} + C$

olur.

ÖRNEK : $\int \cos ax\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $ax = t$ denirse $dx = \frac{1}{a} dt$ olur.

$$\int \cos ax\, dx = \int \cos t \frac{1}{a}\, dt = \frac{1}{a}(\sin t) + C$$

olacağından

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

olur. Benzer şekilde

$$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

olduğu gösterilebilir.

ÖRNEK : $\int e^{ax}\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $ax = t$ denirse $a\, dx = dt$ olur.

$$\int e^{ax}\, dx = \int e^{t} \frac{1}{a}\, dt = \frac{1}{a} e^{t} + C$$

olacağından

$$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$$

bulunur. Buna göre

$$\int e^{-x}\, dx = -e^{-x} + C$$

$$\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

olacaktır.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $x = at$ denirse $dx = a\, dt$ olur. Buna göre

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{a.dt}{a^2 + a^2 t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{a}\arctan t + C$$

olur. $t = \frac{x}{a}$ olduğundan

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\arctan \frac{x}{a} + C$$

olur. Benzer şekilde

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

olduğu gösterilebilir.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $3 - 2x - x^2 = 3 - (x^2 + 2x) = 4 - (x^2 + 2x + 1) = 4 - (x + 1)^2$

olduğundan

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x + 1)^2}} = \arcsin \frac{x + 1}{2} + C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int x^2\sqrt{x-2}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $x-2=t$ denirse $dx=dt$ olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x-2}\,dx &= \int (t+2)^2 t^{1/2}\,dt=\int (t^2+4t+4)t^{1/2}\,dt\\ &= \int (t^{5/2}+4t^{3/2}+4t^{1/2})\,dt=\frac{2}{7}t^{7/2}+\frac{8}{5}t^{5/2}+\frac{8}{3}t^{3/2}+C\\ &= \frac{2}{7}(x-2)^{7/2}+\frac{8}{5}(x-2)^{5/2}+\frac{8}{3}(x-2)^{3/2}+C\end{aligned}$$

bulunur.

Yukarıdaki örneklerden de gördüğümüz gibi, herbir integrale ayrı bir değişken değiştirmesi uygulanmaktadır. Fakat bazı özel tipte olan integraller vardır ki bu integrallere uygulanacak değişken değiştirmeler bellidir.

Bu özel değişken değiştirmelerden birkaçını verelim :

1. $\sqrt{a^2-x^2}$ **den başka köklü ifade ihtiva etmeyen fonksiyonların integralinde**

$$x=a\sin t\,,\qquad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$$

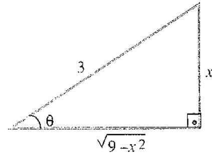
değişken değiştirmesi yapılırsa, trigonometrik fonksiyonların bir rasyonel ifadesinin integrali elde edilir.

ÖRNEK : $\int \frac{x+8}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $x=3\sin t$ değişken değiştirmesi yapılırsa $dx=3\cos t\,dt$ olur.

Buna göre,

$$\begin{aligned}\int \frac{x+8}{\sqrt{9-x^2}}\,dx &= \int \frac{3\sin t+8}{\sqrt{9-9\sin^2 t}}\,3\cos t\,dt\\ &= \int \frac{3\sin t+8}{3\cos t}\,3\cos t\,dt=\int (3\sin t+8)\,dt\\ &= -3\cos t+8t+C\\ &= -3\cos\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)+8\arcsin\frac{x}{3}+C\end{aligned}$$



olur. Şimdi sinüsü $\frac{x}{3}$ olan yayın kosinüsü, yani $\cos(\arcsin\frac{x}{3})$ ifadesini hesaplayalım. Bunun için bir diküçgen çizelim. Dar açılardan birinin ölçüsüne θ diyelim. Bu açının karşıkenar uzunluğu x, hipotenüs 3 birim olsun. Komşu kenar uzunluğu $\sqrt{9-x^2}$ olur.

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

olduğundan

$$\cos(\arcsin\frac{x}{3})=\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

olur. O halde

$$\int \frac{x+8}{\sqrt{9-x^2}}\,dx=-\sqrt{9-x^2}+8\arcsin\frac{x}{3}+C$$

olacaktır.

2. $\sqrt{x^2-a^2}$ **den başka köklü ifade bulundurmayan fonksiyonların integralinde**

$$x=a\sec t,\quad 0<t<\frac{\pi}{2}\quad \text{veya}\quad \frac{\pi}{2}<t<\pi$$

değişken değiştirmesi yapılırsa köklü ifade bulundurmayan integraller elde edilir.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $x=3\sec t$ denirse $dx=3\frac{\sin t}{\cos^2 t}\,dt$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} &= \int \frac{3\sin t/\cos^2 t}{\frac{3}{\cos t}\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9}}\,dt\\ &= \int \frac{\sin t/\cos t}{\frac{3}{\cos t}\sqrt{1-\cos^2 t}}\,dt=\frac{1}{3}\int 1\,dt=\frac{1}{3}t+C=\frac{1}{3}\arccos\frac{3}{x}+C\end{aligned}$$

olur.

3. $\sqrt{a^2+x^2}$ **ifadesinden başka köklü ifade bulundurmayan fonksiyonların integrasyonunda**

$$x=a\tan t,\qquad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$$

değişken değiştirmesi kolaylık sağlar.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $x = 2\tan t$ denirse $dx = 2(1+\tan^2 t)\,dt$ olur. Bu değerler yerine konursa

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{2(1+\tan^2 t)}{4\tan^2 t . 2\sqrt{1+\tan^2 t}}dt = \frac{1}{4}\int \frac{\sqrt{1+\tan^2 t}}{\tan^2 t}dt$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt = \frac{1}{4}\int (\sin t)^{-2}\cos t\, dt$$

$$= -\frac{1}{4\sin t} + C = -\frac{1}{4\sin\left(\arctan\frac{x}{2}\right)} + C$$

olur. Şimdi $\sin(\arctan\frac{x}{2})$ ifadesini hesaplayalım. Tanjantı $\frac{x}{2}$ olan θ açısının sinüsü $\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ olacağından

$$\sin(\arctan\frac{x}{2}) = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$$

olur. Buna göre,

$$\int \frac{dt}{x^2\sqrt{x^2+4}} = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$$

bulunur.

4. $\sqrt[n_i]{ax+b}$ **biçimindeki ifadeleri bulunduran fonksiyonların integralini hesaplamak için,** n_i **kök kuvvetlerinin en küçük ortak katı** p **olmak üzere,**

$$ax + b = t^p$$

değişken değiştirmesi yapılır.

ÖRNEK : $\int \frac{\sqrt[4]{x+1}+2}{\sqrt[6]{x+1}}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : 4 ile 6 nın en küçük ortak katı 12 olduğundan

$$x + 1 = t^{12}$$

değişken değiştirmesi yapılmalıdır. $dx = 12t^{11}dt$ olacağından

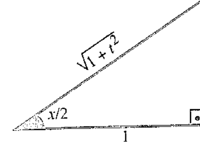
$$\int \frac{\sqrt[4]{x+1}+2}{\sqrt[6]{x+1}}dx = \int \frac{t^3+2}{t^2}12t^{11}dt = 12\int (t^{12}+2t^9)\,dt$$

$$= \frac{12}{13}t^{13} + \frac{24}{10}t^{10} + C = \frac{12}{13}(x+1)^{13/12} + \frac{12}{5}(x+1)^{5/6} + C$$

bulunur.

5. Trigonometrik fonksiyonların rasyonel ifadesi olan fonksiyonların integrasyonunda **yarım açı yöntemi** denilen

$$\tan\frac{x}{2} = t$$



değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

olacağından

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 2\frac{1}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{x}{2} = \arctan t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

bulunur. Dönüşüm sonunda bir rasyonel fonksiyonun integrali elde edilir.

ÖRNEK : $\int \frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\tan\frac{x}{2} = t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int \frac{1+\sin x}{(1+\cos x)\sin x}dx = \int \frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{t^2+2t+1}{t}dt = \frac{1}{2}\int \left(t+2+\frac{1}{t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2} + 2t + \ln|t|\right) + C$$

$$= \frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

bulunur.

NOT : $\tan\frac{x}{2} = t$ dönüşümü ile integral rasyonel fonksiyonların integraline dönüşür. Rasyonel fonksiyonların integralleri 5. 2. 4. kesimde ayrıntılı olarak işlenmiştir.

PROBLEMLER

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int x e^{x^2} dx$ (b) $\int x^2 (1-x^3)^5 dx$

(c) $\int \frac{(\ln x)^5}{x} dx$ (ç) $\int \frac{x^3 dx}{1+x^8}$

(d) $\int \sin^4 x \cos x \, dx$ (e) $\int \frac{\sin x}{\cos^6 x} dx$

(f) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$ (g) $\int \frac{dx}{x \ln x}$

(ğ) $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x} \frac{dx}{x}$ (h) $\int \frac{x+2}{x^2+4x+3} dx$

(ı) $\int \frac{3x}{\sqrt[3]{2x^2+5}} dx$ (i) $\int \frac{dx}{(1+2x)^2}$

(j) $\int \sin(2x+1)\pi \, dx$ (k) $\int \frac{\sin 2x}{4+\cos 2x} dx$

(l) $\int \frac{3x \, dx}{\sqrt{1-x^4}}$ (m) $\int \frac{(1+\sqrt{x})^4}{\sqrt{x}} dx$

(n) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx$ (o) $\int e^{\sin x} \cos x \, dx$

(ö) $\int \frac{dx}{100+9x^2}$ (p) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$

(r) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ (s) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^4 x}} dx$

(ş) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$ (t) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+1}{\sqrt[4]{x-1}} dx$

(u) $\int \frac{x+2}{(x-1)^4} dx$ (ü) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}}$

(v) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$ (y) $\int \frac{e^{ax} dx}{1+e^{2ax}}$

2. Aşağıdaki integralleri karşılarında yazılı dönüşümler yardımıyla hesaplayınız.

(a) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-2}}$, $x = \frac{1}{t}$

(b) $\int \frac{dx}{e^x+1}$, $x = -\ln t$

(c) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{x+1}}$, $x = t^2 - 1$

(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$, $x = \ln(t^2+1)$

(e) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} dx$, $x = \ln(t^2-1)$

(f) $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx$, $x = \text{arccot}\, t$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$ (b) $\int \frac{dx}{1+\cos x}$

(c) $\int \frac{dx}{1+\sin x}$ (ç) $\int \frac{dx}{2+\sin x-\cos x}$

(d) $\int \frac{dx}{(1-\cos x)^2}$ (e) $\int \frac{dx}{\sin x}$

4. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ olduğunda

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

olacağını gösteriniz.

5.2.2 KISMİ İNTEGRASYON YÖNTEMİ

u ile v, x değişkeninin birer fonksiyonu olsunlar. Bir çarpımın diferansiyelinden,

$$d(u.v) = du.v + dv.u \Rightarrow$$

$$u.dv = d(u.v) - v.du$$

olduğunu biliyoruz. Her iki tarafın integrali alınırsa

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

bulunur. Eğer $\int v du$ integralinin hesabı $\int u \, dv$ integralinin hesabından daha kolay ise bu yöntem oldukça fayda sağlar. Demek ki bu yöntemi kullanmak için integral içini u ve dv diye öyle iki çarpana ayırmalıdır ki, $\int v \, du$ integrali $\int u \, dv$ integralinden daha kolay olsun.

Eğer integrant, bir polinom ile bir üstel fonksiyonun çarpımı ise, polinoma u, diğer kısma dv demek kolaylık sağlar.

ÖRNEK : $\int x e^{3x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $u = x$, $dv = e^{3x} dx$ denirse $du = dx$ ve

$$v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x}$$

olur. Buna göre,

$$\int x e^{3x} dx = x\frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx = \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{3}\frac{1}{3} e^{3x} + C$$

$$= \frac{e^{3x}}{9}(3x-1) + C$$

olur.

İntegrant, bir polinom ile bir trigonometrik fonksiyonun çarpımı ise, polinoma u demek yarar sağlar.

ÖRNEK : $\int x \sin 2x \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $u = x$, $dv = \sin 2x \, dx$ denirse $du = dx$, $v = \int \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x$

olur. Buna göre

$$\int x \sin 2x \, dx = x.\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) - \int -\frac{1}{2}\cos 2x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x \, dx$$

$$= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

olur.

ÖRNEK : $\int \frac{x \, dx}{\cos^2 x}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $u = x$, $dv = \frac{dx}{\cos^2 x}$ denirse $du = dx$, $v = \tan x$ olur. Dolayısıyla

$$\int \frac{x \, dx}{\cos^2 x} = x \tan x - \int \tan x \, dx = x \tan x + \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

$$= x \tan x + \ln |\cos x| + C$$

olur.

Eğer integrant, bir polinom ile logaritmik bir fonksiyonun çarpımı ise logaritmik fonksiyona u demek yarar sağlar.

ÖRNEK : $\int x^5 \ln x \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$u = \ln x$, $dv = x^5 dx$ denirse $du = \frac{1}{x} dx$, $v = \frac{x^6}{6}$ olur.

Bu durumda

$$\int x^5 \ln x \, dx = (\ln x).\frac{x^6}{6} - \int \frac{x^6}{6}\frac{dx}{x} = \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{1}{6}\int x^5 dx$$

$$= \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{1}{36}x^6 + C = \frac{x^6}{36}(6\ln x - 1) + C$$

bulunur.

Eğer integrant bir fonksiyondan ibaretse o fonksiyon u, $dx = dv$ alınır.

ÖRNEK : $\int \arctan x \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $u = \arctan x$, $dv = dx$ denirse, $du = \frac{1}{1+x^2} dx$, $v = x$ olur.

Buna göre,

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int x \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

olur.

Bazı hallerde karşımıza hesabı istenen integral çıkabilir. Bu durumda bu integrali eşitliğin soluna alıp işleme devam etmek gerekir.

ÖRNEK : $\int e^{ax}\cos bx \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$u = e^{ax}$, $\cos bx \, dx = dv$ denirse $du = ae^{ax} dx$, $v = \frac{1}{b}\sin bx$

olacağından

$$\int e^{ax}\cos bx \, dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx \, dx$$

olur. Son integrale aynı yöntem tekrar uygulanırsa

$$\int e^{ax}\cos bx \, dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx \, dx$$

elde edilir. Son integral hesaplanması gereken integraldir. Bu integral eşitliğin soluna geçirilirse,

$$\frac{a^2+b^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx \, dx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx$$

bulunur. Her iki taraf $\frac{a^2+b^2}{b^2}$ ile bölünürse

$$\int e^{ax}\cos bx \, dx = e^{ax}\frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^2+b^2} + C$$

olur.

ÖRNEK : $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $u = xe^x$, $dv = \frac{dx}{(x+1)^2}$ denirse, $du = (1+x)e^x dx$,

$v = -\frac{1}{x+1}$ olacağından

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = xe^x \frac{-1}{x+1} - \int -\frac{1}{x+1}(1+x)e^x dx$$

$$= -\frac{xe^x}{x+1} + \int e^x dx = -\frac{xe^x}{x+1} + e^x + C$$

$$= \frac{e^x}{x+1} + C$$

olur.

ÖRNEK : $\int \sqrt{x^2+m}\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $u = \sqrt{x^2+m}$, $dv = dx$ denirse $du = \frac{x}{\sqrt{x^2+m}}dx$, $v = x$ olur.

Kısmi integrasyon formülünden

$$\int \sqrt{x^2+m}\, dx = x\sqrt{x^2+m} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+m}}dx$$

$$= x\sqrt{x^2+m} - \int \frac{x^2+m-m}{\sqrt{x^2+m}}dx$$

$$= x\sqrt{x^2+m} - \int \sqrt{x^2+m}\, dx + m\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}$$

bulunur. Ortadaki terim eşitliğin soluna geçirilirse

$$2\int \sqrt{x^2+m}\, dx = x\sqrt{x^2+m} + m\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+m}}$$

$$= x\sqrt{x^2+m} + m\ln\left(x+\sqrt{x^2+m}\right)$$

olur. Her iki taraf 2 ile bölünerek

$$\int \sqrt{x^2+m}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+m} + \frac{m}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+m}\right) + C$$

eşitliği elde edilir.

Bazı fonksiyonların integralini hesaplamak için kısmi integrasyon yöntemini birkaç kez uygulamak gerekir.

ÖRNEK : $\int x^2 e^{-x} dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $u = x^2$, $dv = e^{-x}dx$ denirse $du = 2x\,dx$, $v = -e^{-x}$ olur.

Buna göre,

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2\int xe^{-x} dx$$

olur. Son integralde $u = x$, $dv = e^{-x}dx$ denirse $du = dx$, $v = -e^{-x}$ olur.

Bu durumda

$$\int x e^{-x} dx = -xe^{-x} + \int e^{-x} dx$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x}$$

olacağından

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) + C$$

$$= -e^{-x}\left(x^2 + 2x + 2\right) + C$$

bulunur.

Yukarıdaki yol izlenerek $P_m(x)$, $m-$ ninci dereceden bir polinom olmak üzere

$$\int P_m(x)e^x dx = e^x\left[P_m(x) - P'_m(x) + P''_m(x) + \ldots + (-1)^m P_m^{(m)}(x)\right]$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Örneğin :

$$\int \left(x^3 + 2x\right)e^x dx = e^x\left[x^3 + 2x - \left(3x^2 + 2\right) + 6x - 6\right]$$

$$= e^x\left(x^3 - 3x^2 + 8x - 8\right)$$

olur.

5. 2. 3 İNDİRGEME BAĞINTILARI

Kısmi integrasyon metodu yardımıyla, yüksek dereceden bazı ifadelerin integrali daha küçük dereceden bir ifadenin integraline dönüştürülebilir. Bu yolla yüksek dereceli integral kolayca hesaplanabilir. Şimdi bu indirgeme formüllerinden bazılarını çıkaralım.

ÖRNEK : $n \in N$ için $\int \cos^n x \, dx$ integrali için bir indirgeme bağıntısını bulunuz.

Çözüm :

$$I_n = \int \cos^n x \, dx = \int \cos^{n-1} x \cos x \, dx$$

integralinde $u = \cos^{n-1} x$, $dv = \cos x \, dx$ denirse, kısmi integrasyon formülünden

$$\begin{aligned} I_n &= \cos^{n-1} x \sin x + \int (n-1) \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, (1 - \cos^2 x) \, dx \, , \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx \end{aligned}$$

bulunur. Son integral, hesabı istenen integral olduğundan

$$n I_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx$$

olur. Her iki taraf n ile bölünürse

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

indirgeme bağıntısı elde edilir.

ÖRNEK : İndirgeme bağıntısından yararlanarak

$\int \cos^5 x \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : İndirgeme formülünde $n = 5$ yazılırsa

$$\int \cos^5 x \, dx = \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} \int \cos^3 x \, dx$$

bulunur. İndirgeme formülünde $n = 3$ konursa

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \, dx &= \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \int \cos x \, dx \\ &= \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \sin x \end{aligned}$$

elde edilir. Bu değer yukarıda yerine konursa

$$\int \cos^5 x \, dx = \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{15} \cos^2 x \sin x + \frac{8}{15} \sin x + C$$

bulunur.

ÖRNEK : $n > 1$ olmak üzere, $\int \frac{dx}{\sin^n x}$ integrali için bir indirgeme formülü bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{1}{\sin^{n-2} x} \frac{dx}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{1}{\sin^{n-2} x} \cot x - \int \cot x \, (n-2) \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} \, dx \\ &= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2) \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x} \, dx \\ &= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2) \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^n x} \, dx \\ &= -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} - (n-2) \int \frac{dx}{\sin^n x} + (n-2) \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x} \end{aligned}$$

olduğundan

$$(1 + n - 2) I_n = -\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + (n-2) \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

buradan da

$$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1} \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}$$

bulunur.

$n = 1$ için

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

olacağı ileride gösterilecektir.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^4 x} &= -\frac{1}{3} \frac{\cos x}{\sin^3 x} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{2}{3} \cot x + C \\ &= -\frac{\cos x}{3 \sin^3 x} - \frac{2}{3} \frac{\cos x}{\sin x} + C. \end{aligned}$$

olur.

ÖRNEK : $\int \tan^n x\, dx$ için bir indirgeme formülü bulunuz.

Çözüm : $n = 1$ için

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$$

olur. $n > 1$ olsun.

$$\begin{aligned}\int \tan^n x\, dx &= \int \tan^{n-2} x \tan^2 x\, dx = \int \tan^{n-2} x(1 + \tan^2 x - 1)\, dx \\ &= \int \tan^{n-2} x(1 + \tan^2 x)\, dx - \int \tan^{n-2} x\, dx \\ &= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\, dx\end{aligned}$$

bulunur. O halde

$$\int \tan^n x\, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x\, dx$$

olur.

ÖRNEK : $\int \tan^6 x\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : İndirgeme formülünde $n = 6$ yazılırsa

$$\int \tan^6 x\, dx = \frac{1}{5} \tan^5 x - \int \tan^4 x\, dx$$

bulunur. İndirgeme formülünde $n = 4$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\int \tan^4 x\, dx &= \frac{1}{3} \tan^3 x - \int \tan^2 x\, dx \\ &= \frac{1}{3} \tan^3 x - \int (1 + \tan^2 x - 1)\, dx \\ &= \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C\end{aligned}$$

bulunur. Bu değer yukarıda yerine konursa

$$\int \tan^6 x\, dx = \frac{1}{5} \tan^5 x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \tan x - x + C$$

olur.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}$ integrali için bir indirgeme bağıntısı bulunuz.

Çözüm : $n = 1$ için

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

olduğunu biliyoruz. $n > 1$ olsun. $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{n-1}}$ integralinde

$u = (a^2 + x^2)^{-n+1}$, $dv = dx$ alınır, kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{n-1}} &= \frac{x}{(a^2 + x^2)^{n-1}} + (2n-2) \int \frac{x^2\, dx}{(a^2 + x^2)^n} \\ &= \frac{x}{(a^2 + x^2)^{n-1}} + (2n-2) \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(a^2 + x^2)^n} dx \\ &= \frac{x}{(a^2 + x^2)^{n-1}} + (2n-2) \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{n-1}} - (2n-2)a^2 \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}\end{aligned}$$

bulunur. Son integral çekilirse

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n} = \frac{x}{(2n-2)a^2 (a^2 + x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2} \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{n-1}}$$

bağıntısı elde edilir.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{(4x^2 + 4x + 10)^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $4x^2 + 4x + 10 = (2x + 1)^2 + 9$

eşitliği gözönüne alınır ve $2x + 1 = t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int \frac{dx}{(4x^2 + 4x + 10)^2} = \int \frac{dx}{[(2x + 1)^2 + 9]^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{(t^2 + 9)^2}$$

integrali elde edilir. İndirgeme formülünde $n = 2$, $a = 3$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{(t^2 + 9)^2} &= \frac{t}{18(t^2 + 9)} + \frac{1}{18} \int \frac{dt}{t^2 + 9} \\ &= \frac{t}{18(t^2 + 9)} + \frac{1}{18} \frac{1}{3} \arctan \frac{t}{3} + C \\ &= \frac{2x + 1}{18(4x^2 + 4x + 10)} + \frac{1}{54} \arctan \frac{2x + 1}{3} + C\end{aligned}$$

olur. Buna göre

$$\int \frac{dx}{(4x^2+4x+10)} = \frac{2x+1}{36(4x^2+4x+10)} - \frac{1}{108}\arctan\frac{2x+1}{3} + C$$

olacaktır.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ integralini $x = \tan t$ dönüşümü yardımıyla hesaplayınız.

Çözüm :

$x = \tan t$ için $dx = (1+\tan^2 t)\,dt$ olacağından

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{1+\tan^2 t}{(1+\tan^2 t)^2}\,dt = \int \frac{dt}{1+\tan^2 t}$$

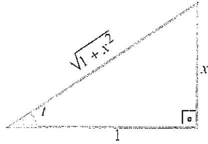
$$= \int \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = \int \cos^2 t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}(t + \sin t\cos t) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}\right) + C$$



bulunur.

1. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

(b) $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} + C$

(c) $\int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + C$

(d) $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C$

(e) $\int x\arctan x\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan x + \frac{1}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + C$

(f) $\int \sin(\ln x)dx = \frac{x}{2}[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C$

(g) $\int x^3 e^{x^2}dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

(h) $\int x^2\sin x\,dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

(ı) $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = -x\cot x + \ln(\sin x) + C$

(i) $\int x^2\ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int e^x\sin x\,dx$ (b) $\int x\arcsin x\,dx$

(c) $\int x^8\ln x\,dx$ (ç) $\int (\ln x)^3 dx$

(d) $\int x^2\cos x\,dx$ (e) $\int x\,2^x\,dx$

(f) $\int x^3 e^{-x}dx$ (g) $\int \frac{\cos x}{e^x}dx$

(h) $\int \log_5 x\,dx$ (ı) $\int x\ln(x+1)\,dx$

(i) $\int x^2(\ln x)^2 dx$ (j) $\int x(x-1)^8 dx$

(k) $\int \cos(\ln x)\,dx$ (l) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx$

(m) $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ (n) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

(o) $\int x\ln(x^2+1)\,dx$ (ö) $\int x\sec^2 x\,dx$

(p) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ (r) $\int x^2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx$

(s) $\int (x^2+1)e^{3x}dx$ (ş) $\int x\,2^{-x}dx$

(t) $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}dx$

3. Aşağıdaki indirgeme formüllerinin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx$

(b) $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\,\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2}}$, n > 1

(c) $\int \cot^n x\,dx = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1}x - \int \cot^{n-2}x\,dx$, n > 1

(d) $\int \frac{\cos^n x}{\sin x}dx = \frac{1}{n-1}\cos^{n-1}x + \int \frac{\cos^{n-2}x}{\sin x}dx$

(e) $\int \frac{\sin^n x}{\cos x}dx = -\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x + \int \frac{\sin^{n-2}x}{\cos x}dx$

(f) $\int (a^2-x^2)^n dx = \frac{x(a^2-x^2)}{2n+1} + \frac{2na^2}{2n+1}\int (a^2-x^2)^{n-1}dx$

(g) $\int x^p(\ln x)^n dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}(\ln x)^n - \frac{n}{p+1}\int x^p(\ln x)^{n-1}dx$

(h) $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2+a}} = \frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{x^2+a} - \frac{n-1}{n}a\int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{x^2+a}}dx$

4. $I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x}dx$ olduğuna göre, $n \geq 2$ için

$$I_n = \frac{2\sin(n-1)x}{n-1} + I_{n-2}$$

eşitliğinin varlığını gösteriniz.

5. $I_n = \int \frac{x^n\,dx}{1+x^2}$ olduğuna göre, $n > 1$ için

$$I_n + I_{n-2} = \frac{x^n-1}{n-1}$$

olduğunu gösteriniz.

6. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \sin^4 x\,dx$ (b) $\int \cos^7 x\,dx$

(c) $\int (x\ln x)^3 dx$ (ç) $\int \tan^5 x\,dx$

(d) $\int x^2(\ln x)^{10}dx$ (e) $\int \frac{dx}{\cos^8 x}$

$P(x)$ ve $Q(x)$, x in polinomlarını göstersinler. $P(x)$ polinomunun derecesi $Q(x)$ polinomunun derecesinden büyük ise,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

yazılabilir. Burada $R(x)$ ve $K(x)$ birer polinom olup $R(x)$ in derecesi $Q(x)$ in derecesinden küçüktür. Şu halde $\frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklinde bir rasyonel fonksiyonun integrallenmesi, payının derecesi paydasının derecesinden küçük olan $\frac{R(x)}{Q(x)}$ şeklinde bir rasyonel fonksiyonun integrallenmesine indirgenir. Diğer taraftan $\frac{R(x)}{Q(x)}$ ifadesi, $b^2 - 4ac < 0$ ve $n > 1$ olmak üzere, basit kesir denilen

$$\frac{M}{px+q}, \quad \frac{N}{(px+q)^n}, \quad \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} \quad \text{ve} \quad \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^n}$$

biçimindeki bazı kesirlerin toplamı olarak yazılabilir. O halde $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ şeklinde bir integral, $n \in N$ olmak üzere,

$$\int K(x)dx, \quad \int \frac{dx}{px+q}, \quad \int \frac{dx}{(px+q)^n},$$

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+C}dx, \quad \int \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^n}dx$$

şeklindeki integrallerin hesabına indirgenmiş olur. Bu integrallerin nasıl hesaplandığını örneklerle görelim.

ÖRNEK :

$\int \frac{dx}{3x+2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

Paydanın türevi 3 olduğundan

$$\int \frac{dx}{3x+2} = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{3x+2} = \frac{1}{3}\ln|3x+2| + C$$

olur.

ÖRNEK: $\int \frac{2}{(5x+1)^3}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $5x+1 = t$ denirse, $dx = \frac{1}{5}dt$ olur. Buna göre,

$$\int \frac{2}{(5x+1)^3}dx = 2\int t^{-3}\frac{1}{5}dt = \frac{2}{5}\frac{t^{-2}}{-2} + C$$

$$= -\frac{1}{5}(5x+1)^{-2} + C = -\frac{1}{5(5x+1)^2} + C$$

olur.

ÖRNEK : $\int \frac{2x+5}{x^2+4x+13}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $x^2+4x+13 = (x+2)^2+9$ ve $(x^2+4x+13)' = 2x+4$

olduğundan

$$\int \frac{2x+5}{x^2+4x+13}dx = \int \frac{2x+4+1}{x^2+4x+13}dx$$

$$= \int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx + \int \frac{1}{x^2+4x+13}dx$$

$$= \ln(x^2+4x+13) + \int \frac{1}{(x+2)^2+9}dx$$

$$= \ln(x^2+4x+13) + \frac{1}{3}\arctan\frac{x+2}{3} + C$$

olur.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{(4+x^2)^2}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\int \frac{dx}{4+x^2}$ integralinde $u = \frac{1}{4+x^2}$, $dv = dx$ alınıp kısmi integrasyon yöntemi uygulanırsa

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{x}{4+x^2} + 2\int \frac{x^2}{(4+x^2)^2}dx = \frac{x}{4+x^2} + 2\int \frac{4+x^2-4}{(4+x^2)^2}dx$$

$$\int \frac{dx}{4+x^2} = \frac{x}{4+x^2} + 2\int \frac{dx}{4+x^2} - 8\int \frac{dx}{(4+x^2)^2}dx$$

bulunur. Buradan $\int \frac{dx}{(4+x^2)^2}$ integrali çekilirse,

$$\int \frac{dx}{(4+x^2)^2} = \frac{x}{8(4+x^2)} + \frac{1}{8}\int \frac{dx}{4+x^2}$$

$$= \frac{x}{8(4+x^2)} + \frac{1}{8}\,\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2} + C$$

$$= \frac{x}{8(4+x^2)} + \frac{1}{16}\arctan\frac{x}{2} + C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int \frac{4dx}{x^2-4}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : İntegrantı basit kesirlerin toplamı biçiminde yazalım :

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow 4 = A(x+2) + B(x-2)$$

olur. $x = -2$ yazılırsa $4 = -4B \Rightarrow B = -1$ bulunur. $x = 2$ yazılırsa

$4 = 4A \Rightarrow A = 1$ olur.

Şu halde

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

olur. Buna göre

$$\int \frac{4}{x^2-4}dx = \int \frac{1}{x-2}dx - \int \frac{1}{x+2}dx = \ln|x-2| - \ln|x+2| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int \frac{2x+1}{(x-1)^2}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} \Rightarrow 2x+1 = A(x-1) + B$

olur. $x = 1$ yazılırsa $3 = B$ bulunur. $x = 0$ yazılırsa

$1 = -A + B \Rightarrow 1 = -A + 3 \Rightarrow A = 2$

bulunur. O halde

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\int \frac{2x+1}{(x-1)^2}dx = \int \frac{2}{x-1}dx + \int \frac{3}{(x-1)^2}dx$$

$$= 2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + C$$

olur.

ÖRNEK : $\int \frac{-2x+4}{(1+x^2)(x-1)^2}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\frac{-2x+4}{(1+x^2)(x-1)^2} = \underset{(x-1)(x^2+1)}{\frac{A}{x-1}} + \underset{(x^2+1)}{\frac{B}{(x-1)^2}} + \underset{(x-1)^2}{\frac{Cx+D}{x^2+1}} \Rightarrow$

$$-2x + 4 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2$$

eşitliğinde $x = 1$ yazılırsa, $2 = 2B \Rightarrow B = 1$ bulunur. Buna göre,

$$-2x + 4 = A(x-1)(x^2+1) + x^2 + 1 + (Cx+D)(x-1)^2$$

yazılabilir.

$x = 0$ için $\quad -A + D = 3$

$x = -1$ için $\quad A + C - D = -1$

$x = 2$ için $\quad 5A + 2C + D = -5$

denklemleri elde edilir. Birinci ve ikinci denklem taraf tarafa toplanırsa $C = 2$ bulunur. Üçüncü denklemde $C = 2$ yazılırsa $5A + D = -9$ denklemi bulunur.

$$\begin{cases} -A + D = 3 \\ 5A + D = -9 \end{cases}$$

denklem sistemi çözülerek $A = -2$, $D = 1$ bulunur. Buna göre,

$$\int \frac{-2x+4}{(1+x^2)(x-1)^2}dx = \int \frac{-2}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{2x+1}{x^2+1}dx$$

$$= -2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx$$

$$= -2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + \ln|x^2+1| + \arctan x + C$$

$$= \ln\frac{x^2+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \arctan x + C$$

olur.

ÖRNEK : $I = \int \dfrac{2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 2x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}\, dx$ integralini hesaplayınız.

$$\begin{array}{l|l} 2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 2x - 2 & x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ \underline{-\,2x^4 - 6x^3 + 6x^2 - 2x} & 2x \\ x^2 - 2 & \end{array}$$

Çözüm : Payın derecesi paydanın derecesinden büyük olduğundan önce pay paydaya bölünür.

Bölüm $2x$, kalan $x^2 - 2$ ve $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$ olduğundan verilen integral,

$$I = \int \left[2x + \frac{x^2 - 2}{(x-1)^3} \right] dx = x^2 + \int \frac{x^2 - 2}{(x-1)^3}\, dx$$

olur. Şimdi son integrali hesaplayalım.

$$\frac{x^2 - 2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} \Rightarrow$$

$$x^2 - 2 = A(x-1)^2 + B(x-1) + C \Rightarrow$$

$$= A(x^2 - 2x + 1) + Bx - B + C \Rightarrow$$

$$x^2 - 2 = Ax^2 + (-2A + B)x + (A - B + C)$$

olduğundan

$$\begin{cases} A = 1 \\ -2A + B = 0 \\ A - B + C = -2 \end{cases}$$

olmalıdır. Bu denklem sistemi çözülürse $A = 1$, $B = 2$, $C = -1$ bulunur. Buna göre,

$$I = x^2 + \int \left[\frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} \right] dx \Rightarrow$$

$$I = x^2 + \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + C$$

olacaktır.

UYARI : Payda $(x-a)^n$ biçiminde olduğunda, kesirlerin

$$\frac{A_1}{x-a}, \frac{A_2}{(x-a)^2}, \ldots, \frac{A_n}{(x-a)^n}$$

biçiminde olacağına dikkat ediniz.

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \frac{2}{x^2-1}\, dx$ (b) $\int \frac{x^3}{2x-1}\, dx$

(c) $\int \frac{x^2}{x+1}\, dx$ (ç) $\int \frac{dx}{x^2+x-6}$

(d) $\int \frac{dx}{x^3+9x}$ (e) $\int \frac{x^4}{x^2-1}\, dx$

(f) $\int \frac{x-1}{x+1}\, dx$ (g) $\int \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\, dx$

(h) $\int \frac{5x^2+3}{(2x+1)(x^2+4)}$ (ı) $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\, dx$

(j) $\int \frac{x\, dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ (k) $\int \frac{dx}{(x+2)(x+1)^2}$

(l) $\int \frac{x+2}{x^2+x}\, dx$ (m) $\int \frac{x\, dx}{(x+1)^2(x+2)^2}$

(n) $\int \frac{x^4}{x^4-1}\, dx$ (o) $\int \frac{x^2+x+1}{x(x^2+1)}\, dx$

(ö) $\int \frac{x+10}{2x^2+5x-3}\, dx$ (p) $\int \frac{4x^3-7x}{x^4-5x^2+4}\, dx$

(r) $\int \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x}\, dx$ (s) $\int \frac{x^2}{(x+2)^3}\, dx$

(ş) $\int \frac{dx}{x^3+x}$ (t) $\int \frac{x+4}{x^3+4x}\, dx$

(u) $\int \frac{x\, dx}{(x+1)(x^2+1)}\, dx$ (v) $\int \frac{x^2\, dx}{(x-1)(x^2+2x+1)}$

(y) $\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-1}\, dx$ (z) $\int \frac{2x^3+5x^2+8x+4}{(x^2+2x+2)^2}\, dx$

2. Aşağıdaki integralleri önce bir değişken değiştirmesiyle rasyonel fonksiyonların integraline dönüştürünüz. Sonra integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \frac{e^t\, dt}{e^{2t}+3e^t+2}$ (b) $\int \frac{\cos y\, dy}{\sin^2 y + \sin y - 6}$

(c) $\int \frac{1-\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}\, du$ (ç) $\int \frac{du}{\sqrt{u}+\sqrt[3]{u}}$

(d) $\int \frac{\sin\theta\, d\theta}{\cos^2\theta + \cos\theta - 2}$ (e) $\int \frac{e^{4t}}{(e^{2t}-1)^3}\, dt$

(f) $\int \frac{1+\ln t}{t(3+2\ln t)^2}\, dt$ (g) $\int \frac{\sec^2 t\, dt}{\tan^3 t + \tan^2 t}$

(h) $\int \frac{\sin^2 u \cos u\, du}{1+\sin^2 u}$ (ı) $\int \frac{e^\theta\, d\theta}{1-e^{2\theta}}$

(i) $\int \frac{e^\theta\, d^\theta}{1-e^{3\theta}}$ (j) $\int \frac{e^\theta\, d\theta}{e^{2\theta}+3e^\theta+2}$

(k) $\int \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt[3]{t}}\, dt$ (l) $\int \frac{dt}{\sqrt[4]{t}\,(1+\sqrt{t})}$

(m) $\int \sqrt{\frac{t+1}{t-1}}\, dt$ (n) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x^2}\, dt$

3. Aşağıdaki integrallere önce kısmi integrasyon yöntemi uygulayınız. Sonra elde edilen integralleri hesaplayınız.

(a) $\int t \arctan t\, dt$ (b) $\int t^3 \arctan t\, dt$

(c) $\int \ln(1+t^2)\, dt$ (ç) $\int t^2 \ln(1+t)\, dt$

4. Aşağıdaki integralleri önce

$$\tan\frac{x}{2} = t$$

dönüşümü ile rasyonel fonksiyonların integraline dönüştürüp sonra integrali hesaplayınız.

(a) $\int \frac{d\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ (b) $\int \frac{d\theta}{2+\sin\theta+\cos\theta}$

5. $\tan\frac{x}{2} = t$ dönüşümü yardımıyla

$$\int \sec x\, dx = \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| + C$$

olduğunu gösteriniz. $\tan\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ özdeşliğinden yararlanarak

$$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

olduğunu gösteriniz.

6. Problem 5 den yararlanarak

$$\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

olduğunu gösteriniz.

5.2.5 TRİGONOMETRİK İNTEGRALLER

Trigonometrik integraller, integrantı trigonometrik fonksiyonların cebirsel kombinasyonları olan integrallerdir. Bunların başlıcaları aşağıda verilecektir. Her tip örneklerle açıklanacaktır.

$\int \sin ax \sin bx\, dx$, $\int \sin ax \cos bx\, dx$, $\int \cos ax \cos bx\, dx$ tipindeki integraller

$\int \sin ax \sin bx\, dx$, $\int \sin ax \cos bx\, dx$, $\int \cos ax \cos bx\, dx$ integralleri

$$\begin{cases} \sin ax \sin bx = \frac{1}{2}[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x] \\ \sin ax \cos bx = \frac{1}{2}[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x] \\ \cos ax \cos bx = \frac{1}{2}[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x] \end{cases}$$

bağıntılarından yararlanarak hesaplanır.

ÖRNEK : $\int \sin 4x \sin 7x\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\int \sin 4x \sin 7x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 3x - \cos 11x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{11}\sin 11x\right) + C$$

$$= \frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{22}\sin 11x + C$$

olur.

ÖRNEK : $\int \sin 5x \cos 3x\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\int \sin 5x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 8x + \sin 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{8}\cos 8x - \frac{1}{2}\cos 2x\right) + C$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int \cos 4x \cos 3x\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\int \cos 4x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int (\cos 7x + \cos x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\sin 7x + \sin x\right) + C$$

$$= \frac{1}{14}\sin 7x + \frac{1}{2}\sin x + C$$

$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ Tipindeki İntegraller

$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ integralleri, m ve n doğal sayılarının durumuna göre, farklı yollarla hesaplanır.

(a) m tek ise, $\cos x = t$, n tek ise $\sin x = t$ dönüşümü ile integral, bir polinomun integraline dönüşür.

ÖRNEK : $\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $m = 5$ olup tekdir. $\cos x = t$ denilirse $-\sin x\, dx = dt$ olacağından

$$\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \sin x\, dx = \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x\, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x\, dx = -\int (1 - t^2)^2 t^2\, dt$$

$$= -\int (t^2 - 2t^4 + t^6)\, dt = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\cos x$ in kuvveti tek olduğundan $\sin x = t$ değişken değiştirmesi yapılmalıdır. $\cos x\, dx = dt$ olacağından

$$\int \sin^4 x \cos^3 x\, dx = \int \sin^4 x \cos^2 x \cos x\, dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx$$

$$= \int t^4 (1 - t^2)\, dt = \int (t^4 - t^6)\, dt$$

$$= \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + C = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{7}\sin^7 x + C$$

olur.

ÖRNEK : $\int \sin^9 x \cos^3 x \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : Her iki kuvvet de tek olduğundan $\sin x = t$ de $\cos x = t$ de denebilir. Kuvveti büyük olana t demek işlemi kolaylaştırır. Bu nedenle $\sin x = t$ dönüşümünü yapalım. $\cos x \, dx = dt$ olacağından

$$\int \sin^9 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^9 x \cos^2 x \cos x \, dx$$
$$= \int \sin^9 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x)$$
$$= \int t^9 (1 - t^2) dt = \int (t^9 - t^{11}) dt$$
$$= \frac{1}{10} t^{10} - \frac{1}{12} t^{12} + C = \frac{1}{10} \sin^{10} x - \frac{1}{12} \sin^{12} x + C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int \cos^5 x \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $m = 0$, $n = 5$ olduğundan $\sin x = t$ değişken değiştirmesi yapılmalıdır. Buna göre,

$$\int \cos^5 x \, dx = \int \cos^4 x \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx$$
$$= \int (1 - t^2)^2 dt = \int (1 - 2t^2 + t^4) dt$$
$$= t - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 + C$$
$$= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C$$

olur.

(b) m ve n sayılarının her ikisi de çift ise,

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

dönüşümü yardımıyla kuvvetler düşürülür.

ÖRNEK : $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $$\sin^4 x \cos^2 x \, dx = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{8}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)(1 + \cos 2x)$$
$$= \frac{1}{8}(1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x)$$

olduğundan

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8}\left[\int (1 - \cos 2x) dx - \int \cos^2 2x \, dx + \int \cos^3 2x \, dx\right]$$
$$= \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x - \int \cos^2 2x \, dx + \int \cos^3 2x \, dx\right]$$

olur.

$$\int \cos^2 2x \, dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x) \, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x \ ,$$

$$\int \cos^3 2x \, dx = \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int (1 - t^2) dt$$
$$= \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{3}t^3\right) = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x$$

değerleri yukarıda yerlerine konulursa

$$\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x\right) + C$$
$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x - \frac{1}{3}\sin^3 2x\right) + C$$

bulunur.

$\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ Tipindeki İntegraller

Bu integraller de m ve n nin tek veya çift oluşuna göre, farklı yollardan hesaplanır.

(a) n çift ise, $\tan x = t$ dönüşümü yapılır.

$$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x \quad \text{ve} \quad d(\tan x) = \sec^2 x \, dx$$

bağıntılarından yararlanarak bir polinomun integrali elde edilir.

ÖRNEK : $\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $$\int \tan^6 x \sec^4 x \, dx = \int \tan^6 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx$$
$$= \int \tan^6 x (1 + \tan^2 x) d(\tan x)$$
$$= \int t^6 (1 + t^2) dt = \int (t^6 + t^8) dt = \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 + C$$
$$= \frac{1}{7}\tan^7 x + \frac{1}{9}\tan^9 x + C$$

olur.

(b) m tek ise, $\sec x = t$ dönüşümü yapılır.

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1, \quad d(\sec x) = \tan x \sec x \, dx$$

bağıntılarından yararlanarak bir polinomun integrali elde edilir.

ÖRNEK : $\int \tan^5 x \sec^3 x \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\sec x = t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int \tan^5 x \sec^3 x \, dx = \int \tan^4 x \sec^2 x \tan x \sec x \, dx$$
$$= \int (\tan^2 x)^2 \sec^2 x \tan x \sec x \, dx$$
$$= \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^2 x \tan x \sec x \, dx$$
$$= \int (t^2-1)^2 t^2 \, dt = \int (t^6 - 2t^4 + t^2) \, dt$$
$$= \frac{1}{7}t^7 - \frac{2}{5}t^5 + \frac{1}{3}t^3 + C$$
$$= \frac{1}{7}\sec^7 x - \frac{2}{5}\sec^5 x + \frac{1}{3}\sec^3 x + C$$

bulunur.

(c) m çift, n tek ise, $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ bağıntısı yardımıyla, integrant sadece sec x in tek kuvvetlerinin toplamı şekline getirilebilir. Bu nedenle önce sec x in tek kuvvetlerinin nasıl hesaplandığını görelim.

ÖRNEK : $\int \sec x \, dx$ integralini hesaplayalım.

Çözüm : İntegrant $\sec x + \tan x$ ile çarpılır ve bölünürse

$$\int \frac{\sec^2 x + \tan x \sec x}{\sec x + \tan x} dx$$

bulunur. Pay paydanın türevi olduğundan integralin değeri paydanın logaritmasına eşittir. Buna göre

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

olacaktır.

ÖRNEK : $\int \tan^2 x \sec x \, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\int \tan^2 x \sec x \, dx = \int (\sec^2 x - 1)\sec x \, dx = \int \sec^3 x \, dx - \int \sec x \, dx$$

olur. Bir önceki örnekten $\int \sec x \, dx$ değeri bilinmektedir. Şimdi $\int \sec^3 x \, dx$ integralini hesaplayalım.

$$\int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \sec^2 x \, dx$$

integralinde $u = \sec x$, $dv = \sec^2 x \, dx$ denirse, $v = \tan x$ ve $du = \tan x \sec x \, dx$ olacağından

$$\int \sec^3 x \, dx = \tan x \sec x - \int \tan x \tan x \sec x \, dx$$
$$= \tan x \sec x - \int \tan^2 x \sec x \, dx$$
$$= \tan x \sec x - \int (\sec^2 x - 1)\sec x \, dx$$
$$= \tan x \sec x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafında bulunan $\int \sec^3 x \, dx$ eşitliğin soluna alınır ve her iki taraf 2 ile bölünürse

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}\int \sec x \, dx$$
$$= \frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

bulunur. Buna göre,

$$\int \tan^2 x \sec x \, dx = \frac{1}{2}\tan x \sec x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| - \ln|\sec x + \tan x| + C$$
$$= \frac{1}{2}\tan x \sec x - \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

olur.

$\int \cot^m x \csc^n x \, dx$ Tipindeki İntegraller

Bu tip integraller bundan önce incelediğimiz $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ integrallerinde izlenen yolla hesaplanır. Burada

$$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$$

bağıntısından yararlanılır.

ÖRNEK : $\int \cot^3 x \csc^4 x\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $$\int \cot^3 x \csc^4 x\, dx = \int \cot^3 x \csc^2 x \csc^2 x\, dx$$
$$= \int \cot^3 x(1 + \cot^2 x)\csc^2 x\, dx$$
$$= -\int t^3(1+t^2)\,dt = -\int (t^5 + t^3)\,dt$$
$$= -\frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{4}t^4 + C = -\frac{1}{6}\cot^6 x - \frac{1}{4}\cot^4 x + C$$

olur.

Bir fonksiyonun pay ve paydası değişkenleri $\sin x$ ve $\cos x$ olan birer polinom ise bu fonksiyonlara $\sin x$ ve $\cos x$ in bir rasyonel fonksiyonudur denir. Örneğin,

$$f(x) = \frac{\sin^3 x + \sin x \cos^2 x}{1 + \sin x + \cos x} \quad , \quad g(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x + 3}$$

fonksiyonları $\sin x$ ve $\cos x$ in birer rasyonel fonksiyonudur. Bu tip fonksiyonları kısaca $R(\sin x, \cos x)$ ile göstereceğiz.

$\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ Tipindeki İntegraller

(a) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ ise $\cos x = t$

$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ ise, $\sin x = t$ değişken değiştirmesi yapıldığında t nin bir rasyonel fonksiyonunun integrali elde edilir.

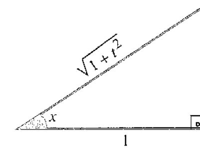
ÖRNEK : $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $R(-\sin x, \cos x) = \frac{(-\sin x)^3}{\cos^2 x} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} = -R(\sin x, \cos x)$

olduğundan $\cos x = t$ değişken değiştirmesi yapılmalıdır.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin x\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x\, dx$$
$$= -\int \frac{1-t^2}{t^2}\,dt = \int \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)dt = t + \frac{1}{t} + C$$
$$= \cos x + \sec x + C$$

bulunur.



ÖRNEK : $\int \cos^3 x \tan^5 x\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : Bir önceki örnekte verilen yol izlenerek

$$\int \cos^3 x \tan^5 x\, dx = \int \cos^3 x \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x}\,dx = \int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}\,dx$$
$$= \int \frac{(\sin^2 x)^2}{\cos^2 x}\sin x\, dx = \int \frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^2 x}\sin x\, dx$$
$$= -\int \frac{(1-t^2)^2}{t^2}\,dt = -\int \frac{1-2t^2+t^4}{t^2}\,dt$$
$$= -\int (t^{-2} - 2 + t^2)\,dt = \frac{1}{t} + 2t - \frac{1}{3}t^3 + C$$
$$= \frac{1}{\cos x} + 2\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$
$$= \sec x + 2\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

bulunur.

(b) $\sin x$ ve $\cos x$ işaret değiştirdiğinde, integrant işaret değiştirmiyorsa, yani

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

ise, $\tan x = t$ veya $\cot x = t$ değişken değiştirmesi yapıldığında bir rasyonel fonksiyonun integrali elde edilir.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\sin x$ yerine $-\sin x$, $\cos x$ yerine $-\cos x$ yazıldığında integrant değişmediğinden,

$$\tan x = t$$

değişken değiştirmesini yapalım. Bu durumda

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad , \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad , \quad dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

olacağından

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}\,\frac{1}{(1+t^2)^2}}\,dt = \int \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^2}\,dt$$
$$= \int (t^2 + 2 + t^{-2})\,dt = \frac{1}{3}t^3 + 2t - \frac{1}{t} + C$$
$$= \frac{1}{3}\tan^3 x + 2\tan x - \cot x + C$$

bulunur.

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \sin 3x \sin 5x \, dx$ (b) $\int \cos 2x \cos 3x \, dx$

(c) $\int \sin \frac{x}{2} \sin \frac{7x}{2} \, dx$ (d) $\int \cos \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} \, dx$

(e) $\int \sin 5x \cos 2x \, dx$ (f) $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} \, dx$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \sin^3 x \cos^2 dx$ (b) $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$

(c) $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx$ (d) $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$

(e) $\int \sin^7 x \, dx$ (f) $\int \cos^4 x \, dx$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \tan^3 x \sec^4 x \, dx$ (b) $\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx$

(c) $\int \tan^4 x \sec^6 x \, dx$ (d) $\int \tan^3 x \sec x \, dx$

(e) $\int \tan^4 \sec^6 x \, dx$ (f) $\int \tan^5 x \, dx$

4. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \cot^3 x \csc^4 x \, dx$ (b) $\int \cot^3 x \csc^3 x \, dx$

(c) $\int \cot^4 x \csc^6 x \, dx$ (d) $\int \cot^4 x \csc^5 x \, dx$

(e) $\int \cot^3 \csc x \, dx$ (f) $\int \cot^3 x \, dx$

5. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$ (b) $\int \sin^3 x \cos^5 x \, dx$

(c) $\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx$ (d) $\int \frac{\sin^2 x}{4 + \cos^2 x} dx$

(e) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$ (f) $\int \cos^3 x \tan^3 x \, dx$

(g) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} dx$ (h) $\int \cos^4 x \tan x \, dx$

(ı) $\int \tan^4 x \cos x \, dx$

6. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \sin^3 x \cos^2 2x \, dx$

(b) $\int \sin^2 2x \cos^3 2x \, dx$

(c) $\int \sin x \cos^3 3x \, dx$

(d) $\int \sin^3 (1-x) \cos^5 (1-x) \, dx$

(e) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx$

(f) $\int \sin x \cos 2x \cos 3x \, dx$

7. $1 - \cos 2u = 2 \sin^2 u$ bağıntısından yararlanarak

$$\int \sqrt{1 - \cos 4x} \, dx$$

integralini hesaplayınız.

8. $1 + \sin 2u = (\sin u + \cos u)^2$ olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak

$$\int \sqrt{1 + \sin 6x} \, dx$$

integralini hesaplayınız.

9. $\int \sqrt{1 + \cos 6x} \, dx$ integralini hesaplayınız.

10. $\int \sqrt{1 - \sin 4x} \, dx$ integralini hesaplayınız.

11. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^5 x}} dx$ (b) $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$

12. $\int R(\sinh x, \cosh x) \, dx$ biçimindeki integraller

$\tanh x = t$

değişken değiştirmesiyle hesaplanabilir.

Aşağıdaki integralleri bu yolla hesaplayınız.

(a) $\int \frac{dx}{\sinh x \cosh x}$ (b) $\int \frac{\sinh x \cosh x}{\sinh^2 \cosh^2 x}$

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ **İntegralinin Hesabı**

Bu integralin hesabı a, b, c sayılarına göre değişir. Eğer $b^2 - 4ac > 0$ ve $a < 0$ ise karekök içi, k bir sabit ve u bir lineer ifade olmak üzere, $k^2 - u^2$ haline dönüştürülebilir. Bu durumda

$$\int \frac{du}{\sqrt{k^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{k} + C$$

eşitliğinden yararlanılır.

Eğer $a > 0$ ise, karekök içi $u^2 + p$ veya $u^2 - p$ biçimine getirilebilir. Bu durumda

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm p}} = \ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm p}\right) + C$$

bağıntısından yararlanılır.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $-x^2 + 2x + 3 = -[x^2 - 2x - 3] = -[(x-1)^2 - 1 - 3] = 4 - (x-1)^2$

olur. $x - 1 = u$ denirse $dx = du$ olacağından

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x-1)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{4 - u^2}}$$

$$= \arcsin \frac{u}{2} + C = \arcsin \frac{x-1}{2} + C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $4x^2 + 4x + 3 = (2x+1)^2 + 2$ olduğundan

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2 + 2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 2}}$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(u + \sqrt{u^2 + 2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln\left(2x + 1 + \sqrt{4x^2 + 4x + 3}\right) + C$$

olur.

(2) $\displaystyle\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ İntegralinin Hesabı

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{m}{2a}\int \frac{2ax+2a\frac{n}{m}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

$$= \frac{m}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx + \left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

$$= \frac{m}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + \left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

olur. Son integral (1) tipinde bir integraldir. Bunun nasıl hesaplandığını biliyoruz.

ÖRNEK : $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+4x+1}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+\frac{4}{3}}{\sqrt{x^2+4x+1}}\,dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4-4+\frac{4}{3}}{\sqrt{x^2+4x+1}}\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int (x^2+4x+1)^{-1/2}(2x+4)dx - 4\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$$

$$= 3\sqrt{x^2+4x+1} - 4\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-3}}$$

$$= 3\sqrt{x^2+4x+1} - 4\ln\left(x+2+\sqrt{(x+2)^2-3}\right) + C$$

$$= 3\sqrt{x^2+4x+1} - 4\ln\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right) + C$$

olur.

(3) $\displaystyle\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ İntegralinin Hesabı

Bu tip integrallerde

$$\frac{1}{px+q} = t$$

değişken değiştirmesi yapıldığında (1) tipinde bir integral elde edilir.

ÖRNEK : $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+3}}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\frac{1}{x-1} = t \Rightarrow x = \frac{t+1}{t} \Rightarrow dx = \frac{-1}{t^2}\,dt$$

dönüşümü yapıldığında

$$\int t\,\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\sqrt{\frac{t^2+2t+1}{t^2}+3}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{4t^2+2t+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(2t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{2}\ln\left(u+\sqrt{u^2+\frac{3}{4}}\right)+C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(2t+\frac{1}{2}+\sqrt{4t^2+2t+1}\right)+C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)}+1}\right)+C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left[\frac{x+3+2\sqrt{x^2+3}}{2(x-1)}\right]+C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left[\frac{x+3+2\sqrt{x^2+3}}{(x-1)}\right]+C_1$$

bulunur.

(4) $\displaystyle\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ İntegralinin Hesabı

Bu integralde $P_n(x)$, n. dereceden bir polinomdur. $Q_{n-1}(x)$, $n-1$. dereceden bilinmeyen katsayılı bir polinom ve λ bir reel sayı olmak üzere

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte her iki tarafın türevi alınır ve aynı dereceli terimlerin katsayıları eşitlenirse $Q_{n-1}(x)$ in katsayıları ile λ bulunur. Geriye eşitliğin sağındaki (1) tipindeki integrali hesaplamak kalır.

ÖRNEK : $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = (Ax+B)\sqrt{1-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

eşitliğinde her iki tarafın türevi alınırsa

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = A\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(Ax+B) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$$

$$x^2 = A(1-x^2) - x(Ax+B) + \lambda \Rightarrow$$

$$x^2 = -2Ax^2 - Bx + A + \lambda \Rightarrow$$

$$A = -\frac{1}{2}\ ,\ B = 0\ ,\ \lambda = \frac{1}{2}$$

olur. Buna göre,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C$$

olur.

(5) $\int \frac{dx}{(x-p)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ **İntegralinin Hesabı**

Bu tip integrallerde

$$\frac{1}{x-p} = t \Rightarrow x = p + \frac{1}{t}$$

değişken değiştirmesi yapılırsa (4) tipinde bir integral elde edilir.

ÖRNEK :

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+2x-2}}$$

integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\frac{1}{x-1} = t \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{1}{t^2}dt \quad \text{olacağından}$$

$$I = -\int t^2 \frac{\frac{dt}{t^2}}{\sqrt{\frac{t^2+2t+1}{t^2} + \frac{2t+2}{t} - 2}} = -\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+4t+1}}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+4t+1}} = A\sqrt{t^2+4t+1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4t+1}} \Rightarrow$$

$$\frac{t}{\sqrt{t^2+4t+1}} = A\frac{t+2}{\sqrt{t^2+4t+1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{t^2+4t+1}}$$

$$t = At + 2A + \lambda \Rightarrow A = 1 \text{ ve } 2A + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -2$$

bulunur. Buna göre

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+4t+1}} = \sqrt{t^2+4t+1} - 2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4t+1}}$$

$$= \sqrt{t^2+4t+1} - 2\int \frac{dt}{\sqrt{(t+2)^2-3}}$$

$$= \sqrt{t^2+4t+1} - 2\ln\left(t+2+\sqrt{t^2+4t+1}\right) + C$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+2x-2}}{x-1} - 2\ln\left(\frac{2x-1+\sqrt{x^2+2x-2}}{x-1}\right) + C$$

bulunur. Şu halde

$$\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2+2x-2}} = -\frac{\sqrt{x^2+2x-2}}{x-1} + 2\ln\left(\frac{2x-1+\sqrt{x^2+2x-2}}{x-1}\right) + C$$

olur.

(6) $\int x^r(a+bx^p)^q\,dx$ **İntegralinin Hesabı**

$a, b \in R$ ve $p, q, r \in Q$ olmak üzere

$$\int x^r\left(a+bx^p\right)^q dx$$

biçimindeki integrallere **Binom İntegralleri** adı verilir.

Bu integraller, p, q, r rasyonel sayılarının durumlarına göre, farklı değişken değiştirmelerle hesaplanabilir.

(a) q tamsayı ise, r ile p nin paydalarının en küçük ortak katı k olmak üzere,

$$x = t^k$$

değişken değiştirmesi yapılırsa, integral rasyonel bir fonksiyonun integraline dönüşür.

(b) q tamsayı değil, fakat $\frac{r+1}{p}$ tamsayı ise, q nun paydası n olmak üzere

$$a + bx^p = t^n$$

dönüşümü yapıldığında, rasyonel bir fonksiyonun integrali elde edilir.

(c) q ve $\frac{r+1}{p}$ tamsayı değil, fakat $\frac{r+1}{p}+q$ tamsayı ise, q nun paydası n olmak üzere

$$ax^{-p} + b = t^n$$

dönüşümü yapıldığında rasyonel bir fonksiyonun integrali elde edilir.

ÖRNEK : $\int \sqrt[3]{x}\,(1+2\sqrt{x})^2\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$q=2$ olup tamsayıdır. $r=\frac{1}{3}$, $p=\frac{1}{2}$ sayılarının paydalarının en küçük ortak katı 6 olduğundan $x = t^6$ değişken değiştirmesini yapalım.

$dx = 6t^5dt$ olacağından

$$\int \sqrt[3]{x}\,(1+2\sqrt{x})^2dx = \int t^2(1+2t^3)^2\,6t^5dt = 6\int (1+2t^3)^2\,t^7\,dt$$

$$= 6\int (t^7+4t^{10}+4t^{13})\,dt = \frac{3}{4}t^8+\frac{24}{11}t^{11}+\frac{12}{7}t^{14}+C$$

$$= \frac{3}{4}x^{4/3}+\frac{24}{11}t^{11/6}+\frac{12}{7}x^{7/3}+C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $r=-\frac{2}{3}$, $p=\frac{1}{3}$, $q=\frac{1}{2}$ olduğundan

$$\frac{r+1}{p} = \frac{-\frac{2}{3}+1}{\frac{1}{3}} = 1 \in Z$$

olur. q nun paydası 2 olduğundan

$$1+\sqrt[3]{x}=t^2 \Rightarrow x=(t^2-1)^3 \Rightarrow dx=6t\,(t^2-1)^2\,dt$$

olur. Buna göre,

$$\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = \int x^{-2/3}(1+x^{1/3})^{1/2}dx = \int (t^2-1)^{-2}\,t\,6t\,(t^2-1)^2\,dt$$

$$= 6\int t^2\,dt = 2t^3+C = 2\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{3/2}+C$$

bulunur.

ÖRNEK : $\int \sqrt{\frac{x}{1-x^3}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\int \sqrt{\frac{x}{1-x^3}}\,dx = \int x^{1/2}(1-x^3)^{-1/2}dx$

olduğundan $r=\frac{1}{2}$, $p=3$, $q=-\frac{1}{2}$ dir.

$q \notin Z$, $\frac{r+1}{p}=\frac{1}{2} \notin Z$ ve $\frac{r+1}{p}+q=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0 \in Z$ olduğundan

$$x^{-3}-1=t^2 \Rightarrow x=(1+t^2)^{-1/3}$$

değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\int x^{1/2}(1-x^3)^{-1/2}dx = -\frac{2}{3}\int (1+t^2)^{-1/6}\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)^{-1/2}(1+t^2)^{-4/3}\,t\,dt$$

$$= -\frac{2}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{2}{3}\arctan t + C$$

$$= -\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{1-x^3}{x^3}\right)^{1/2}+C$$

bulunur.

1. İntegralleri hesaplayarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+3}} = \ln\left(x-1+\sqrt{x^2-2x+3}\right)+C$

(b) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \sqrt{x^2+2x-2} + 2\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)+C$

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}\right)+C$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4} - 2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+C$

(e) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{1}{x+1}\right)+C$

(f) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2} = -3\frac{x^{1/6}}{1+x^{1/3}} + 3\arctan\left(x^{1/6}\right)+C$

(g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{12}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{7/3} - 3\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{4/3}+C$

(h) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^{11}}}\,dx = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right)^{9/2}+C$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-8}}$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+5}}$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{15-4x-4x^2}}$ (e) $\displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x-3}}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$ (h) $\displaystyle\int \frac{1-x}{\sqrt{8+2x-x^2}}\,dx$ (ı) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+2}}$

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$ (j) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$ (k) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-x^2}}$

(l) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$ (m) $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (n) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2-x+1}}$

(o) $\displaystyle\int \frac{x^4-2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ (ö) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^2}}$ (p) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2-2x+2}}$

(r) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2-x+1}}$ (s) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2\sqrt{x^2-1}}$ (ş) $\displaystyle\int x^3\left(1+3x^2\right)^{-2}dx$

(t) $\displaystyle\int x^3\left(1+2x^2\right)^{-3/2}dx$ (u) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ (ü) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{1+x^5}}$

(v) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\,\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$ (y) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}\,dx$ (z) $\displaystyle\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^2}}$

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$ (b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$ (c) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}dx$

(ç) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$ (d) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}dx$ (e) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

(f) $\int \frac{e^{3x}dx}{\sqrt{4+9e^{2x}}}$ (g) $\int (\ln x)^2\sqrt{1+(\ln x)^2}\,\frac{dx}{x}$ (h) $\int \sin x\, e^{\cos x}dx$

(ı) $\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}dx$ (j) $\int x^5\sqrt{x^3-1}\,dx$ (k) $\int \sin^5 x\sqrt{\cos x}\,dx$

(l) $\int \frac{\tan x}{(1+\tan^2 x)\cos^2 x}dx$ (m) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2}-\sqrt{1+x}}$ (n) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^6-1}}$

(o) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$ (ö) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$ (p) $\int \sqrt{4+9x^2}\,dx$

(r) $\int e^x\sqrt{4+e^{2x}}\,dx$ (s) $\int x\sqrt{4-x^4}\,dx$ (ş) $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{3/2}}dx$

(t) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x\sqrt{1+\sin^2 x}}$ (u) $\int x^3\arctan x\, dx$ (ü) $\int 3^x\cos x\, dx$

(v) $\int \frac{x\cos x\, dx}{\sin^2 x}$ (y) $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x})\,dx$ (z) $\int \sin x\ln(\tan x)\,dx$

2. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \frac{dx}{1+3\sin 2x}$ (b) $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+5}$ (c) $\int \frac{\sin x\, dx}{1+\sin x}$

(ç) $\int \frac{dx}{\sin x(1+\sin x)}$ (d) $\int \frac{dx}{\sin 2x+\tan 2x}$ (e) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$

(f) $\int \frac{dx}{(\cos^2 x+4\sin x-5)\cos x}$ (h) $\int \frac{dx}{\tan^3 x}$ (ı) $\int \frac{dx}{x(1+x^2)^2}$

(i) $\int \frac{x^3 dx}{1+x^3}$ (j) $\int \frac{dx}{1+x^4}$ (k) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x\sqrt{1+\sin^2 x}}$

(l) $\int \frac{\sqrt{x^4-1}}{x}dx$ (m) $\int \frac{\tan x+\sin x}{\sec x}dx$ (n) $\int \sin^{3/2}x\cos^3 x\, dx$

(o) $\int \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}dx$ (ö) $\int \frac{x^2}{\sqrt{16x^2+9}}dx$ (p) $\int \frac{\sin x+1}{\cos x+1}dx$

(r) $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx$ (s) $\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}$ (ş) $\int \frac{\sqrt{2x-3}\,dx}{1+\sqrt[3]{2x-3}}$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \frac{dx}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}$, $(a.b \neq 0)$

(b) $\int \frac{dx}{1+a\cos x}$, $(a>1)$

(c) $\int \frac{dx}{(a\sin x+b\cos x)^2}$, $(a\neq 0)$

(ç) $\int \frac{a+\tan x}{1-a\tan x}dx$

4. $x=\cos 2t$ değişken değiştirmesi yaparak

$$I=\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

5. $\sin x - 5\cos x = a(\sin x+\cos x)+b(\cos x-\sin x)$

eşitliğini sağlayan a ve b sayılarını bulunuz.

Bundan yararlanarak

$$I=\int \frac{\sin x-5\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

integralini hesaplayınız.

6. Kısmi integrasyon yöntemini kulanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \frac{(x+1)e^{-x}}{x^2}dx$ (b) $\int \frac{x^2 dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$

7. $\int \frac{dx}{x(x+1)\ldots(x+m)}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k=\frac{\ln(x+k)}{k!(m-k)!}$

olduğunu gösteriniz.

8. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \frac{2dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2+4}}$

(b) $\int \frac{(x+4)dx}{(x-1)(x+2)\sqrt{x^2+x+1}}$

(c) $\int \frac{x\, d0}{(x^2-3x+2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

9. Aşağıdaki integralleri karşılarında yazılı dönüşümler yardımıyla, hesaplayınız.

(a) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})x}dx$, $x=t^6$

(b) $\int \frac{2}{(x-2)^2}\sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}}\,dx,$ $\frac{2-x}{2+x}=t^3$

(c) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}\,(\ln(1+x^2)-2\ln x)}{x^4}dx$, $1+\frac{1}{x^2}=t$

(ç) $\int \sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}\,dx$, $\frac{x+2}{x-1}=t^4$

(d) $\int \frac{\sin x\cos x\, dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$, $a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x=t$

(e) $\int \frac{a^2-b}{x^{n+2}}(ax^2+b)^n dx,$ $ax+\frac{b}{x}=t$

(f) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^{2n}-a^{2n}}}$, $x^n=\frac{a^n}{t}$

(g) $\int \frac{(ax^2-b)\,dx}{x\sqrt{c^2x^2-(ax^2+b^2)^2}}$, $ax+\frac{b}{x}=t$

10. İntegrant x ve $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ifadesinin bir rasyonel ifadesi ise **Euler Dönüşümleri** denilen aşağıdaki değişken değiştirmeleri yapılır :

$a>0$ ise, $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$

$c>0$ ise, $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$ ise

$\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$

Buna göre, aşağıdaki integralleri karşılarında yazılı dönüşümlere göre hesaplayınız.

(a) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x-2}}$, $\sqrt{x^2+2x+2}=t-x$

(b) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$, $\sqrt{x^2-x+1}=tx-1$

(c) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$, $\sqrt{1-x^2}=(x-1)t$

11. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

(a) $\int (a^2 - x^2)^n\, dx = \dfrac{x(a^2 - x^2)}{2n+1} + \dfrac{2na^2}{2n+1}\int (a^2 - x^2)^{n-1}\, dx$

(b) $\int e^{ax}\sin^n x\, dx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+n^2}\sin^{n-1}x(a\sin x - n\cos x) + \dfrac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\sin^{n-1}x\, dx$

(c) $\int \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+a}}\, dx = \dfrac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{x^2+a} - \dfrac{n-1}{n}a\int \dfrac{x^{n-2}}{\sqrt{x^2+a}}\, dx \qquad (n \neq 0)$

(d) $\int \sin^n x\cos^{mn} dx = -\dfrac{1}{m+n}\sin^{n-1}x\cos^{m+1}x + \dfrac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2}x\cos^m x\, dx \quad (m \neq -n)$

(e) $\int \dfrac{\cos^m x}{\sin^n x}\, dx = -\dfrac{\cos^{m+1}x}{(n-1)\sin^{n-1}x} + \dfrac{n-m-2}{n-1}\int \dfrac{\cos^m x}{\sin^{n-2}x}\, dx \qquad (n \neq 1)$

(f) $\int \dfrac{\cos^m x}{\sin^n x}\, dx = \dfrac{\cos^{m-1}x}{(m-n)\sin^{n-1}x} + \dfrac{m-1}{m-n}\int \dfrac{\cos^{m-2}x}{\sin^n x}\, dx \qquad (m \neq n)$

12. 11. sorudaki bağıntılardan yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int (4-x^2)^5\, dx$ (b) $\int (9-x^2)^{3/2}\, dx$ (c) $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ (d) $\int e^{2x}\sin^5 x\, dx$

(e) $\int \dfrac{x^5}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$ (f) $\int \sin^2 x\cos^4 x\, dx$ (g) $\int \dfrac{\cos^2 x}{\sin^4 x}$ (h) $\int \dfrac{\cos^4 x}{\sin^2 x}\, dx$

13. f tersi olan bir fonksiyon ve $y = f^{-1}(x)$ olsun.

$$\int f^{-1}(x)\, dx = x\; f^{-1}(x) - \int f(y)dy$$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \arctan x\, dx$ (b) $\int \log_2 x\, dx$

14. f tersi olan bir fonksiyon olsun.

$$\int f^{-1}(x)\, dx = x\; f^{-1}(x) - \int x\left(\frac{d}{dx}f^{-1}\right)dx$$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \arcsin x\, dx$ (b) $\int \ln x\, dx$

15. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

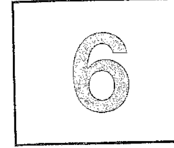
(a) $\int \dfrac{15x^2 - 4x - 81}{(x-3)(x+4)(x-1)}\, dx$ (b) $\int \dfrac{x^4\, dx}{(x+2)(x^2-1)}$

16. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \dfrac{2}{(2-x)^2}\sqrt[3]{\dfrac{2-x}{2+x}}\, dx$ (b) $\int \dfrac{dx}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$ (c) $\int (x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\, dx$ (d) $\int \sqrt{\dfrac{2x+1}{3x+2}}\, dx$

17. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

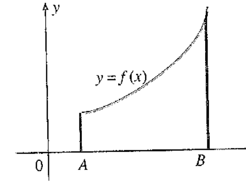
(a) $\int (3x^2 + 6x + 5)\arctan x\, dx$ (b) $\int (x^3+1)\cos x\, dx$ (c) $\int \sin x\ln(\tan x)\, dx$ (d) $\int \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}\, dx$



BELİRLİ İNTEGRALLER

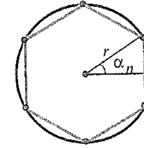
6.1 GİRİŞ

Bu bölümde, mantığı M.Ö. 300 yıllarında Arşimet tarafından kurulan fakat Matematik dünyasına maloluşu 16. yüzyıl ortalarında Newton ve Leibnitz tarafından gerçekleştirilen, **belirli integral** adı verilen yeni bir integral kavramını vermeye çalışacağız. Daha sonra bu kavramla belirsiz integral arasındaki ilişkiler ortaya konacaktır.

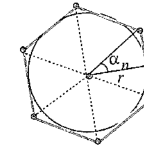


Belirli integral kavramı, bir $y = f(x)$ eğrisi, $0x$ ekseni ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplamak için geliştirilen bir kavram olmakla beraber, daha sonraları birçok alanda kullanılmaya başlanılmıştır.

Şimdi Arşimet tarafından ortaya konulan, bir bölgeye çokgensel bölgelerin alanları yardımıyla yaklaşma düşüncesine bir gözatalım.



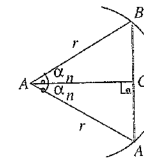
Arşimet, r yarıçaplı bir dairenin alanını hesaplarken o dairenin içine, köşeleri çember üzerinde bulunan, bir n– kenarlı düzgün çokgen ile kenarları çembere teğet olan n– kenarlı başka bir düzgün çokgen çizmiş; dairenin S alanının bu iki çokgenin alanları arasında bir sayı olduğunu söylemiştir. Çokgenlerin kenar sayısı arttırıldığında çokgenlerin alanlarının daire alanına yaklaşacağını ifade etmiştir.



İçteki çokgene P_n, dıştaki çokgene Q_n diyelim. Çokgenlerin bir kenarının yarısını gören merkez açının ölçüsü α_n derece olsun.

$$\alpha_n = \frac{360°}{2n} = \frac{180°}{n}$$

olur.



Archimedes (M.Ö. 287 – 212) Yunan Matematikçisi

Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646 – 1716) Alman Matematikçisi

Isaac Newton (1642 – 1727) İngiliz Matematikçisi

$$\text{Alan}(P_n) = 2n\frac{1}{2}|OC|.|CB| = n\, r \cos\alpha_n\, r \sin\alpha_n$$

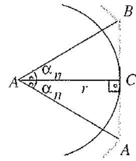
$$= \frac{n}{2} r^2 (2\sin\alpha_n \cos\alpha_n) = \frac{n}{2} r^2 \sin 2\alpha_n$$

$$= \frac{n}{2} r^2 \sin\left(2\frac{180°}{n}\right) = \frac{n}{2} r^2 \sin\left(\frac{360°}{n}\right)$$

ve

$$\text{Alan}(Q_n) = 2n\frac{1}{2}|OM|.|MN| = n.r.r \tan\alpha_n = n\, r^2 \tan\alpha_n$$

$$= n\, r^2 \tan\left(\frac{180°}{n}\right)$$



olacağından, dairenin S alanı

$$\frac{n}{2} r^2 \sin\left(\frac{360°}{n}\right) < S < n\, r^2 \tan\left(\frac{180°}{n}\right)$$

bağıntısını sağlar. Bu bağıntıda n yerine ne kadar büyük değerler verilirse, S için daha iyi yaklaşımlar elde edilir. Örneğin, trigonometrik cetveller yardımıyla

$n = 6$	için	$2{,}598000\, r^2 < S < 3{,}464102\, r^2$
$n = 12$	için	$3{,}000.000\, r^2 < S < 3{,}215390\, r^2$
$n = 24$	için	$3{,}105829\, r^2 < S < 3{,}159660\, r^2$
$n = 48$	için	$3{,}132629\, r^2 < S < 3{,}146086\, r^2$
$n = 96$	için	$3{,}139350\, r^2 < S < 3{,}142715\, r^2$
$n = 180$	için	$3{,}140955\, r^2 < S < 3{,}141912\, r^2$
$n = 360$	için	$3{,}1414133 r^2 < S < 3{,}141672\, r^2$
$n = 720$	için	$3{,}141553\, r^2 < S < 3{,}141613\, r^2$

bağıntıları elde edilir. Bu değerler, bugün çok iyi bilinen $S = \pi\, r^2$ sayısına oldukça yakın sayılardır.

Bir eğri altında kalan bölgelerin alanlarına geçmeden önce bazı kavram ve sembolleri tanıtmaya çalışalım.

6.2 ARALIKLARIN PARÇALANMASI

İntegral teorisinin temel kavramlarından biri, parçalanma kavramıdır. Şimdi bu kavramı tanıyalım.

TANIM

$[a,b]$ aralığını

$a < x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_{n-1} < b$

özelliğini sağlayan $x_1, x_2 \ldots\ , x_{n-1}$ noktaları yardımıyla n tane alt aralığa bölelim. Uygunluğunu sağlamak için a sayısını x_0, b sayısını da x_n ile gösterelim.

$$P = \{x_0\ , x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

kümesine $[a,b]$ aralığının bir parçalanması veya bölüntüsü denir.

$$[x_0, x_1]\ , [x_1, x_2]\ , \ldots\ldots\ [x_{n-1}, x_n]$$

aralıklarına $[a,b]$ nin P parçalanmasına karşılık gelen kapalı alt aralıkları,

$$(x_0, x_1)\ , (x_1, x_2),\ \ldots, (x_{n-1}, x_n)$$

aralıklarına da açık alt aralıkları adı verilir.

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

sayısına $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının boyu veya ölçüsü denir. Alt aralıkların boylarının en büyüğüne P parçalanmasının normu veya maksimal çapı denir, $\|P\|$ ile gösterilir. Şu halde,

$$\|P\| = \text{maks}\ \{\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n\ \}$$

dır. Eğer tüm alt aralıkların boyları birbirlerine eşit ise bu parçalanmaya düzgün parçalanma adı verilir.

Yukarıdaki tanımdan da anlaşılacağı gibi, bir $[a,b]$ aralığının sonsuz çoklukta parçalanması vardır. Bu parçalanmalardan bazılarını karşılaştırmak mümkündür.

TANIM

$[a,b]$ aralığının iki parçalanması P_1 ve P_2 olsun. Eğer $P_1 \subset P_2$ ise P_2 parçalanması P_1 den daha ince veya daha sıktır denir.

ÖRNEK : $[1,2]$ aralığının iki parçalanması

$$P_1 = \left\{1, \frac{2}{3}, 2\right\}, \quad P_2 = \left\{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\right\}$$

olsun. Bu iki parçalanmayı ve bu parçalanmaların normlarını karşılaştırınız.

Çözüm : $P_1 \subset P_2$ olduğundan P_2, P_1 den daha incedir. $\|P_1\| = \frac{1}{2}$, $\|P_2\| = \frac{1}{4}$ olduğundan, $\|P_1\| \geq \|P_2\|$ dir.

Bir $[a,b]$ aralığının $P_1, P_2, \ldots\ldots, P_r$ parçalanmaları için,

$$P_1 \subset P_2 \subset \ldots\ldots \subset P_r$$

ise

$$\|P_1\| \geq \|P_2\| \geq \ldots\ldots\ldots \geq \|P_r\|$$

olacağı açıktır. Yani parçalanma inceldikçe normu küçülür. $\|P\|$ nin sıfıra yaklaşması demek her bir alt aralığın boyunun sıfıra yaklaşması ve dolayısıyla alt aralıkların sayısı olan n nin sınırsız olarak büyümesi yani, $+\infty$ değerine yaklaşması demektir. Bunun karşıtı doğru değildir. Yani $n \to +\infty$ olması $\|P\|$ nin sıfıra yaklaşmasını gerektirmez. Örneğin,

$$P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2, \ldots, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k, \ldots, 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, 1\right\}$$

parçalanması gözönüne alındığında $\forall n \geq 2$ için $\|P\| = \frac{1}{2}$ olur. Dolayısıyla $n \to +\infty$ için $\|P\| = \frac{1}{2} \neq 0$ dır. Eğer P parçalanması düzgün ise bu taktirde

$$\|P\| \to 0 \iff n \to +\infty$$

önermesi doğrudur.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayılarının toplamı, kısaca, $\sum_{k=1}^{n} a_k$ sembolü ile gösterilir. Buna göre,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

olacaktır. Burada $\sum$, toplama sembolü olup "sigma" diye okunur. Bu sembolün sağladığı cebirsel kurallar şunlardır :

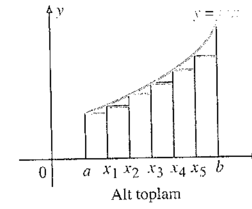
1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ (toplama kuralı)

2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$ (çıkarma kuralı)

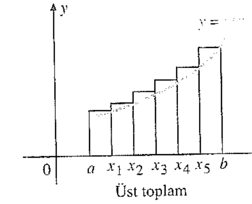
3) $\sum_{k=1}^{n} c\, a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$ (c herhangi bir sabit)

4) $\sum_{k=1}^{n} c = n.c$ (c herhangi bir sabit)

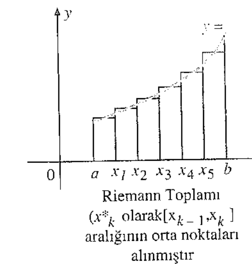
Bu bölümde kullanacağımız temel toplam formülleri aşağıda verilmiştir. Bunların doğruluğu tümevarım yöntemi veya başka cebirsel yöntemlerle gösterilebilir:



Alt toplam



Üst toplam



Riemann Toplamı (x^*_k olarak $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının orta noktaları alınmıştır

a) $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + \ldots.. + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{10}(3k^2 - 2k)$ toplamını bulunuz.

Çözüm : $\sum_{k=1}^{10}(3k^2 - 2k) = 3\sum_{k=1}^{10} k^2 - 2\sum_{k=1}^{10} k$

$$= 3.\frac{10.11.21}{6} - 2.\frac{10.11}{2} = 1155 - 110 = 1045$$

TANIM

$f : [a,b] \to R$ fonksiyonu sürekli olsun. $[a,b]$ aralığının $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ parçalanması için

$$M_k = \text{maks} \{ f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k \}$$

$$m_k = \min \{ f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k \}$$

olsun.

$$A(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \quad \text{ve} \quad Ü(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

toplamlarına sırası ile, f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen ve adı verilir.

$x_k^\star$, $[x_{k-1}, x_k]$ alt aralığında alınan herhangi bir nokta olmak üzere

$$R(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^\star) \Delta x_k$$

toplamına f fonksiyonunun P parçalanmasına karşılık gelen bir denir.

Riemann toplamı, $x_k^\star$ noktalarının seçilişine bağlıdır.

Her P parçalanması için

$$A(f,P) \leq R(f,P) \leq \ddot{U}(f,P)$$

olacağı açıktır.

Kolayca gösterilebileceği gibi parçalanma inceldikçe alt toplamlar artar, üst toplamlar azalır. Bazı fonksiyonlar için üst ve alt toplamlar farkı sıfıra yaklaşır. Bu durumda $\ddot{U}(f,P)$, $A(f,P)$ ve $R(f,P)$ toplamları aynı bir I sayısına yaklaşır.

$f(x) > 0$ olduğunda, $y = f(x)$ eğrisi, $0x$ – ekseni, $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı alt ve üst toplamlar arasında bir sayıdır.

ÖRNEK : $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $P_1 = \left\{1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ parçalanmasına karşılık gelen alt ve üst toplamlarını bulunuz. $y = x^2$ eğrisi, $0x$ – ekseni, $x = 1$ ve $x = 2$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı hangi sayılar arasındadır. Aynı soruları $P_2 = \left\{1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2\right\}$ parçalanması için cevaplandırınız.

P_1 için alt toplam

P_1 için üst toplam

P_2 için alt toplam

P_2 için üst toplam

Çözüm : $f(x) = x^2$ fonksiyonu $[1,2]$ aralığında artan olduğundan $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında en küçük değerini x_{k-1} en büyük değerini x_k noktasında alır.

$$A(f.P_2) = f(1).\frac{1}{4} + f(\frac{5}{4})\frac{1}{4} + f(\frac{3}{2})\frac{1}{4} + f(\frac{7}{4})\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{25}{16} + \frac{9}{4} + \frac{49}{16}\right) = \frac{63}{32} \cong 1.968$$

olacağından bölgenin S alanı için

$$1,625 < S < 3,125$$

yazılabilir. P_2 parçalanması için

$$A(f.P_2) = f(1).\frac{1}{4} + f(\frac{5}{4})\frac{1}{4} + f(\frac{3}{2}) + f(\frac{7}{4})\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{25}{16} + \frac{9}{4} + \frac{49}{16}\right) = \frac{63}{32} \cong 1,968$$

$$\ddot{U}(f,P_2) = f(\frac{5}{4}).\frac{1}{4} + f(\frac{3}{2})\frac{1}{4} + f(\frac{7}{4})\frac{1}{4} + f(2)\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{25}{16} + \frac{9}{4} + \frac{49}{16} + 4\right) = \frac{87}{32} \cong 2,718$$

olur. Buna göre,

$$1,968 < S < 2,718$$

yazılabilir.

Yukarıdaki örnekten de görüldüğü gibi parçalanma inceldikçe alt toplam artmakta, üst toplam azalmakta, dolayısıyla her ikisi de Riemann toplamına yaklaşmaktadır. Eğer alt ve üst toplamlar aynı bir I sayısına yaklaşırsa Riemann toplamı da aynı I sayısına yaklaşır.

6.3 BELİRLİ İNTEGRALLER

TANIM

f, $[a,b]$ üzerinde tanımlı, sınırlı bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^\star)\Delta x_k = I$$

limiti varsa, bu limite f nin a dan b ye kadar integrali denir ve

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

ile gösterilir. Bu durumda f, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirdir denir.

Yukarıdaki limit şu anlamdadır.

$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyleki $\|P\| < \delta$ bağıntısını sağlayan herbir P parçalanması için

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k^\star)\Delta x_k - I\right| < \varepsilon$$

olur.

ÖRNEK : $\int_0^1 x^2\, dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $[0,1]$ aralığını eşit uzunluklu n parçaya bölelim. Bu durumda herbir alt aralığın boyu

$$x_k = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$$

birim olur. Parçalanmanın noktaları

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{n}, \quad x_2 = \frac{2}{n}, \quad x_k = \frac{k}{n}, \quad \ldots, x_n = 1$$

olacaktır. $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında fonksiyon en küçük değerini x_{k-1}, en büyük değerini x_k noktasında alır. Buna göre,

$$A(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2 = \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + (n-1)^2)$$

$$= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}$$

$$\ddot{U}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

olur. Şu halde

$$\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \le R(f,P) \le \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

yazılabilir. Parçalanma düzgün olduğundan

$$\|P\| \to 0 \Leftrightarrow n \to \infty$$

dır. Buna göre

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} \le \lim_{n\to\infty} R(f,P) \le \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3} \le \int_0^1 x^2\,dx \le \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

bulunur.

Şimdi integrallenebilen fonksiyonları karakterize eden teoremi ifade edelim:

> **TEOREM 6.1 :** $f : [a,b] \to R$ fonksiyonu sınırlı olsun. f nin $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart, her $\varepsilon > 0$ için,
>
> $\ddot{U}(f,P) - A(f,P) < \varepsilon$ (Riemann şartı)
>
> kalacak şekilde $[a,b]$ aralığının bir P parçalanmasının varolmasıdır.

Şu ana kadar tanıdığımız fonksiyonların hemen hepsi integrallenebilen fonksiyonlardır. İntegrallenebilen fonksiyonlar ile ilgili detaylı bilgileri [1] ve [2] kaynaklarında bulabilirsiniz. Bu konuda aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

> **TEOREM 6.2 :** f: $[a,b]$ üzerinde sınırlı bir fonksiyon olsun.
>
> (a) f sürekli ise integrallenebilirdir.
>
> (b) f parçalı sürekli ise integrallenebilirdir.
>
> (c) f monoton veya iki monoton fonksiyonun farklı şeklinde yazılabiliyorsa integralenebilirdir.

İntegrallenemeyen bazı fonksiyonlar da vardır. Örneğin $[0,1]$ üzerinde

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ rasyonel ise} \\ 0, & x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon integrallenemeyen bir fonksiyondur. Gerçekten $[a,b]$ aralığının her P parçalanması için

$$A(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0.\Delta x_k = 0$$

$$\ddot{U}(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1.\Delta x_k = 1 - 0 = 1$$

olur. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alınırsa $\ddot{U}(f,P) - A(f,P) = 1$ olup $\varepsilon = \frac{1}{2}$ den küçük kalmaz.

UYARI : İntegralin varlığı başka şey, değerinin bulunabilmesi başka şeydir. Örneğin $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$ integrali vardır, zira e^{x^2} sürekli bir fonksiyondur. Fakat bunun değeri elemanter yollardan bulunamayabilir.

Şimdi belirsiz integral ile belirli integral arasındaki ilişkiyi veren teoremi ifade ve ispat edelim.

> **TEOREM 6.3** (İntegral Hesabın Temel Teoremi) :
>
> f, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun.
>
> Her $x \in (a,b)$ için
>
> $F'(x) = f(x)$
>
> olacak biçimde sürekli bir $F : [a,b] \to R$ fonksiyonu varsa,
>
> $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
>
> dır. Bu eşitliğe Newton – Leibnitz Formülü adı verilir.

İspat : $[a,b]$ aralığının herhangi bir parçalanması $P = \{ x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ olsun. Diferansiyel Hesabın Ortalama Değer Teoremi gereğince

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = F'(\xi_k)\,(x_k - x_{k-1})$$

olacak şekilde en az bir $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ noktası vardır. Hipotezden, $F'(x) = f(x)$ olduğundan, herbir $k = 1, 2, \ldots, n$ için

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(\xi_k)\Delta x_k$$

olacak biçimde en az bir $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$ vardır. Buradan

$$\sum_{k=1}^{n}[F(x_k) - F(x_{k-1})] = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

yazılabilir. Birinci tarafta gerekli sadeleştirmeler yapılır ve $x_0 = a$, $x_n = b$ yazılırsa

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

elde edilir. f integrallenebilir olduğundan $\|P\| \to 0$ için sağdaki toplam f nin $[a,b]$ aralığındaki integraline yaklaşır. Sol taraf ise P parçalanmalarından bağımsızdır. Şu halde

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

olur.

NOT : $F'(x) = f(x)$ eşitliğini sağlayan F fonksiyonunu bulmak demek f nin belirsiz integralini bulmak demektir. Şu halde $\int_a^b f(x)dx$ integralini hesaplamak için önce $\int f(x)\,dx$ belirsiz integrali hesaplanacak sonra bulunan $F(x)$ ifadesinde x yerine önce b üst sınırı, sonra a alt sınır konulacak ve $F(b) - F(a)$ farkı hesaplanacaktır. $F(b) - F(a)$ ifadesi $F(x)\Big|_a^b$ biçiminde de gösterilebilir. Yukarıdaki F fonksiyonuna f nin ilkeli de denir.

Zaman zaman karşılaşacağımız iki integral şöyle tanımlanır.

TANIM

İntegrallenebilen $f : [a,b] \to R$ fonksiyonu için

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$

2) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Şimdi yukarıdaki teoremin basit bir sonucu olan bir teoremi ifade edeceğiz. Bu teoremin ispatı çok kolay olduğundan, bir alıştırma olarak okuyucuya bırakılmıştır.

TEOREM 6.4 :

f, $[a,b]$ de integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

(1) İntegralin değeri integrasyon değişkeninden bağımsızdır, yani

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \ldots = \int_a^b f(z)dz$$

ve $c \in (a,b)$ için

(2) $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

dır.

ÖRNEK : $\int_0^1 x^2\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $F(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$

olacağından

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

olur.

ÖRNEK : $\int_0^{\pi/2} \cos^{3/2}x \sin x\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $F(x) = \int \cos^{3/2}x \sin x\,dx = -\frac{\cos^{5/2}x}{5/2} = -\frac{2}{5}\cos^{5/2}x$

olduğundan

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{3/2}x \sin x\,dx = -\frac{2}{5}\cos^{5/2}x\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{2}{5}.0 + \frac{2}{5}.1 = \frac{2}{5}$$

olur.

$\int_a^b f(x)\,dx$ integralini hesaplamak için, türevi $f(x)$ olan $F(x)$ fonksiyonunu bulup, $F(b) - F(a)$ farkını oluşturmak gerekiyordu. İntegral değişken değiştirme yöntemiyle hesaplanacaksa, değişkenler değiştirilirken, eski değişkene dönmek istenmiyorsa, integrasyon sınırlarını da değiştirmek gerekir. Örneğin:

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx$$

integralinde $g(x) = u$ değişken değiştirmesi yapıldığında $\int f(u)\,du$ integrali elde edilir. Bu yeni integralin sınırları, $u = g(x)$ eşitliğinde x yerine a ve b yazılarak elde edilen $g(a)$ ve $g(b)$ sayılarıdır. Buna göre,

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

olur.

Eğer integral kısmi integrasyon yöntemiyle hesaplanacaksa

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x)$$

bağıntısından yararlanılır.

ÖRNEK : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $\sin x = u$ denirse $\cos x\,dx = du$ olur.

$x = 0$ için $u = \sin 0 = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$ için $u = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ olacağından

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \arctan u\Big|_0^1$$

$$= \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

bulunur.

ÖRNEK : $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm : $u = x$, $dv = \cos x\,dx$ denirse $du = dx$, $v = \sin x$ olur. Buna göre,

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\,dx$$

$$= \pi\sin\pi - 0.\sin 0 + \cos x\Big|_0^{\pi}$$

$$= \cos\pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2$$

olur.

Şimdi, integrallenebilen bir f fonksiyonunun bazı özelliklerini veren teoremi ifade ve ispat edelim.

TEOREM 6.5 :

f, $[a,b]$ üzerinde integrallenebilen bir fonksiyon olsun.

(1) Her $x \in [a,b]$ için $f(x) \geq 0$ ise, $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ dır.

(2) $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$ dir.

İspat :

(1) $f(x) \geq 0$ olsun. f integrallenebilir olduğundan

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx$$

dir. Toplamdaki herbir terim pozitif veya sıfır olacağından

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0 \text{ olur.}$$

(2) $|f(x)| + f(x) \geq 0$ olduğundan

$$\int (|f(x)| + f(x))\,dx \geq 0 \Rightarrow -\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

olur. $|f(x)| - f(x) \geq 0$ olduğundan

$$\int (|f(x)| - f(x))\,dx \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

bulunur. Bu ve yukarıdaki eşitsizlikten

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

bulunur.

TEOREM 6.6 :

$f : [-a,a] \to R$ fonksiyonu sürekli olsun.

(a) f tek fonksiyon ise $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

(b) f çift fonksiyon ise $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

dır.

İspat :

$$I=\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{a} f(x)\,dx=I_1+I_2 \quad \text{olsun.}$$

I_1 integralinde $x=-t$ değişken değiştirmesi yapılırsa, integralin değeri değişkene bağlı olmadığından,

$$I_1=\int_{-a}^{0} f(x)dx=-\int_{a}^{0} f(-t)dt=\int_{0}^{a} f(-x)dx$$

bulunur. O halde

$$I=\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a} f(-x)dx+\int_{0}^{a} f(x)=\int_{0}^{a}[f(-x)+f(x)]\,dx$$

olur.

(a) f tek olduğunda $f(-x)=-f(x)$ olacağından

$$I=\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a}[-f(x)+f(x)]\,dx=\int_{0}^{a} 0\,dx=0$$

bulunur.

(b) f çift olduğunda $f(-x)=f(x)$ olacağından

$$I=\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{a}[f(x)+f(x)]\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

bulunur.

ÖRNEK : $I=\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{x^3\cos x}{1+\sin^{10}x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm :

$$f(-x)=\frac{(-x)^3.\cos(-x)}{1+\sin^{10}(-x)}=-\frac{x^3\cos x}{1+\sin^{10}x}=-f(x)$$

olduğundan f tektir. Şu halde $I=0$ dır.

6.4 İNTEGRALLERİN TÜREVİ

Şimdi integrali almadan türev almamıza imkan tanıyan bir teorem verelim.

TEOREM 6.7:

$f:[a,b]\to R$ fonksiyonu integrallenebilir olsun. $[a,b]$ üzerinde

$$F(x)=\int_{a}^{x} f(t)\,dt$$

eşitliğiyle tanımlanan F fonksiyonu f nin sürekli olduğu her noktada türevlidir ve

$$F'(x)=f(x)$$

dir.

İspat : f fonksiyonu x noktasında sürekli olsun $h>0$ için

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)=\frac{1}{h}\left\{\int_{a}^{x+h} f(t)\,dt-\int_{a}^{x} f(t)\,dt\right\}-f(x)$$

$$=\frac{1}{h}\left\{\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt\right\}-f(x)$$

olur. $\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} dx=1$ olduğundan $f(x)=\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(x)\,dt$ yazılabilir.

Bu durumda

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)=\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt-\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h} f(x)\,dt$$

$$=\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}[f(t)-f(x)]\,dt$$

olur. Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa,

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}[f(t)-f(x)]\,dx\right|\le\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt$$

yazılabilir. f, x noktasında sürekli olduğundan $\forall\varepsilon>0$ için, $\exists\delta>0$ öyleki

$|t-x|<d$ şartını sağlayan her $t\in[a,b]$ için $|f(t)-f(x)|<\varepsilon$ kalır. $h<\delta$ seçersek, $|t-x|<d$ olacağından

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right|<\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}\varepsilon\,dt=\varepsilon$$

bulunur ki, bu

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

olduğunu gösterir. Eğer $h < 0$ ise, benzer yolla

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

olduğu gösterilebilir. Bu iki bağıntıdan

$$F'(x) = f(x)$$

bulunur.

ÖRNEK : $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$ olduğuna göre, $F'(x) = e$ denkleminin köklerini bulunuz.

Çözüm :

$F'(x) = e^{x^2}$ olacağından $e^{x^2} = e \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ olmalıdır.

$y = f(u)$, $u = g(x)$ olduğunda, zincir kuralından

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u).u'(x)$$

yazılabilir. Buna göre,

$$F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,dt \quad \text{ise} \quad F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^{u(x)} f(t)\,dt = f\,(u(x)).\,u'(x)$$

olur. Eğer

$$G(x) = \int_{v(x)}^{a} f(t)dt \quad \text{ise} \quad G'(x) = \frac{d}{dx}\left[-\int_a^{v(x)} f(t)\,dt\right] = -f\,(v(x)).v'(x)$$

olur. Diğer taraftan

$$\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt = \int_{v(x)}^{a} f(t)\,dt + \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$$

yazılabileceğinden

$$\frac{d}{dx} \int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt = f\,(u(x))\,u'(x) - f\,(v(x))\,v'(x)$$

olur. Bu bağıntıya Leibnitz Formülü adı verilir.

ÖRNEK : $F(x) = \int_x^{x^2} \sin(t^2)\,dt$ için $F'(x)$ nedir?

Çözüm : Leibnitz formülünden

$$F'(x) = \sin(x^4).2x - \sin(x^2).1$$

$$= 2x\,\sin(x^4) - \sin(x^2)$$

bulunur.

ÖRNEK : $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\,dt = ?$

Çözüm : Verilen limit $0.\infty$ belirsizliğine sahiptir. L'Hospital kuralından

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\,dt = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\,dt}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^2}{x^4+1}}{2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{2(x^4+1)} = 0$$

bulunur.

6.5 ORTALAMA DEĞER TEOREMLERİ

Bilindiği gibi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayılarının aritmetik ortalaması

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

sayısıdır. Bir $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon, genel olarak, sonsuz çoklukta $f(x)$ değeri aldığından, bunların aritmetik ortalamasını bulmak bu kadar kolay değildir.

Bir fonksiyonun bir aralıktaki ortalama değeri kavramını vermeden, belli bir aralıkta ölçülen sıcaklıkların ortalama değerini bulmaya çalışalım. 24 saatlik bir zaman aralığında, havanın sıcaklığı

$$T = f(t), \quad 0 \le t \le 24$$

ile verilmiş olsun. [$t = 0$ gece yarısı, $t = 24$ ertesi günün gece yarısını göstermektedir.] Birer saatlik aralarla $f(1), f(2), \ldots\ldots, f(24)$ sıcaklıkları ölçülmüş olsun. Bu sıcaklıkların ortalaması, $k = t_k$ olmak üzere,

$$\bar{T} = \frac{1}{24}\sum_{k=1}^{24} f(k) = \frac{1}{24}\sum_{k=1}^{24} f(t_k)$$

olacaktır. Eğer söz konusu gün n eşit aralığa bölünürse, ortalama sıcaklık

$$\bar{T} = \frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)$$

olur. n ne kadar büyük seçilirse ortalama sıcaklık gerçek (esas) ortalama sıcaklığa o kadar yakın olur. Buna göre ortalama sıcaklık

$$\overline{T} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)$$

olacaktır. $a = 0,\ b = 24$ alınırsa, 24 saatlik zaman $\frac{24}{n}$ saatlik alt aralıklara bölüneceğinden

$$\Delta t_k = \frac{24}{n} = \frac{b-a}{n}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\overline{T} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{b-a} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) \frac{b-a}{n}$$

$$= \frac{1}{b-a} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t_k$$

yazılabilir. Son toplam bir Riemann toplamı olduğundan

$$\overline{T} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

olur. a ve b yerine değerleri konursa, o günün sıcaklık ortalaması

$$T = \frac{1}{24} \int_0^{24} f(t)dt$$

bulunur. Buna göre bir fonksiyonun bir aralıktaki ortalama değeri, fonksiyonun o aralıktaki integralinin aralığın boyuna oranı olarak tanımlanabilir.

TANIM

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilir olsun. $y = f(x)$ in $[a,b]$ aralığındaki ortalaması

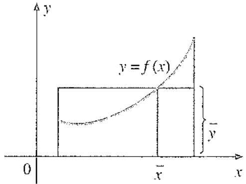
$$\overline{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

sayısıdır.

$$\overline{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

eşitliği

$$\int_a^b f(x)dx = \overline{y}\,.\,(b-a)$$



yazıldığında şu geometrik anlam çıkar : Pozitif bir fonksiyonun altında kalan alan, eni $b-a$, boyu $\overline{y}$ olan bir dikdörtgenin alanına eşittir.

ÖRNEK : $f(x) = x^2$ fonksiyonunun $[0,3]$ aralığındaki ortalama değerini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\overline{y} = \frac{1}{3-0} \int_0^3 x^2\,dx = \frac{1}{3} \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = \frac{27}{9} = 3$$

olur.

TEOREM 6.8 :

f, $[a,b]$ üzerinde sürekli ise $[a,b]$ aralığında

$$f(\overline{x}) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

olacak şekilde en az bir $\overline{x}$ sayısı vardır.

İspat : f, $[a,b]$ de sürekli olduğundan en büyük ve en küçük değerini $[a,b]$ deki noktalarda alır. Fonksiyonunun en büyük değeri M, en küçük değeri m olsun. $[a,b]$ de $m = f(c)$, $M = f(d)$ olacak şekilde c ve d noktaları vardır. Buna göre $\forall x \in [a,b]$ için

$$m \le f(x) \le M$$

yazılabilir. a dan b ye kadar integral alınırsa

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

bulunur. Her iki taraf $b-a$ ile bölünürse

$$m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \le M$$

eşitsizliği elde edilir. Şu halde

$$m \le \overline{y} \le M$$

olacaktır. Sürekli fonksiyonların ara değer teoreminden, $[a,b]$ aralığında

$$f(\overline{x}) = \overline{y}$$

olacak şekilde en az bir $\overline{x}$ noktası vardır.

ÖRNEK : $f(x) = mx + n$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki ortalama değerini bulunuz. Fonksiyon bu ortalama değeri $[a,b]$ aralığının hangi noktasında alır?

Çözüm :

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a}\int_a^b (mx+n)dx = \frac{1}{b-a}\left(m\frac{x^2}{2}+nx\right)\Big|_a^b$$

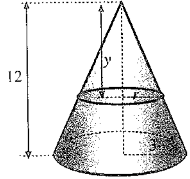
$$= \frac{1}{b-a}\left(\frac{m}{2}b^2+nb-\frac{m}{2}a^2-na\right)$$

$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{m}{2}(b-a)(b+a)+n(b-a)\right] = \frac{m}{2}(b+a)+n$$

olur.

$$m\bar{x}+n = \frac{m}{2}(b+a)+n \Rightarrow \bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

bulunur. Şu halde $f(x) = mx + n$ fonksiyonları ortalama değerini, $[a,b]$ aralığının orta noktası olan $\frac{a+b}{2}$ noktasında almaktadır.



ÖRNEK : Taban yarıçapı 3, yüksekliği 2 birim olan bir dairesel dik koni tepesinden y birim uzakta, tabanına paralel bir düzlemle kesiliyor. Elde edilen dairesel kesitin alanının ortalama değeri nedir?

Çözüm : Benzerlikten

$$\frac{r}{3} = \frac{y}{12} \Rightarrow r = \frac{y}{4}$$

olur. Kesitin alanı $0 \le y \le 12$ olmak üzere,

$$A(y) = \pi r^2 = \pi\left(\frac{y}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\pi y^2$$

olur. Ortalama alan

$$\bar{A} = \frac{1}{12-0}\int_0^{12} A(y)dy = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{16}\pi\int_0^{12} y^2 dy = \frac{1}{12.16}\pi\frac{y^3}{3}\Big|_0^{12} = 3\pi$$

bulunur.

Şimdi, Ortalama Değer Teoreminden daha genel olan bir teoremi ispatlayalım.

TEOREM 6.9 :

f ve g , $[a,b]$ üzerinde aynı işaretli ve sürekli fonksiyonlar olsun. $[a,b]$ aralığında

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

olacak şekilde enaz bir c noktası vardır.

İspat : f nin $[a, b]$ aralığında aldığı en büyük değer M, en küçük değer m olsun. Bu takdirde her $x \in [a, b]$ için $m \le f(x) \le M$ olur. $[a,b]$ de $g(x) \ge 0$ olsun.

Bu takdirde

$$mg(x) \le f(x)\,g(x) \le Mg(x)$$

yazılabilir. ($g(x) \le 0$ için bu eşitsizlik ters döner.) Buradan

$$m\int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M\int_a^b g(x)dx$$

bulunur. Şu halde m ile M arasında öyle bir k vardır ki

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = k\int_a^b g(x)dx$$

olur. f sürekli olduğundan m ile M arasındaki her değeri en az bir kez alır. Dolayısıyla $f(c) = k$ olacak şekilde en az bir $c \in [a,b]$ vardır.

ÖRNEK :

$$0 < \int_0^1 \frac{x^4\,dx}{(1+x^4)^2} < \frac{1}{8}$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $f(x) = x$, $g(x) = \frac{x^3}{(1+x^4)^2}$ alınırsa, $[0,1]$ de

$$\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{(1+x^4)^2} = c.\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{(1+x^4)^2} = \frac{c}{8}$$

olacak şekilde bir c sayısı vardır. $0 < c < 1$ olduğundan

$$0 < \int_0^1 \frac{x^4\,dx}{(1+x^4)^2} < \frac{1}{8}$$

bulunur.

1. İntegral tanımından yararlanarak aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int_0^1 x\,dx$ b) $\int_0^1 x^2\,dx$ c) $\int_0^1 e^x\,dx$ d) $\int_0^2 2^x\,dx$

2. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx = \frac{14}{3}$ b) $\int_0^3 x\sqrt{1+x}\,dx = \frac{112}{15}$ c) $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\,dx = \frac{1}{2}$

ç) $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\,dx = \frac{100}{3}$ d) $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan\theta}{\sqrt{2\sec\theta}}\,d\theta = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)$ e) $\int_{\frac{\pi^2}{36}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}\sin\sqrt{t}}\,dt = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cot^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)dx = 1 - \frac{\pi}{4}$ g) $\int_{-1}^2 \frac{t^2}{\sqrt{t+2}}\,dt = \frac{26}{15}$ h) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2\ln 2 - 1$

ı) $\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{x^8+1} = \frac{\pi}{16}$ i) $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx = \frac{2}{3}$

3. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2\sec^2 x\,dx$ c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt$ ç) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (8y^2 + \sin y)\,dy$

d) $\int_4^9 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ e) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$ f) $\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$ g) $\int_0^1 \frac{t^2\,dt}{\sqrt{t^6+4}}$

h) $\int_0^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x\,dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$ ı) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$ i) $\int_a^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}$ j) $\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx$

k) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$ l) $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\tan^2 x}{x - \tan x}\,dx$ m) $\int_0^3 [\![x]\!]\,dx$ n) $\int_0^2 x[\![x]\!]\,dx$

o) $\int_{-1}^2 |x|\,dx$ ö) $\int_0^2 x|1-x^2|\,dx$ p) $\int_{-1}^1 x\,sgnx\,dx$ r) $\int_0^4 sgn(x^2 - 4x + 3)\,dx$

s) $\int_{-1}^2 |x|[\![x]\!]\,dx$ ş) $\int_{-1}^3 |[\![x]\!]|\,dx$ t) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x}$ u) $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$

ü) $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx$ v) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x+1}}{e^x+3}\,dx$ y) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ z) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}$

4. $\int_a^b [\![x]\!]\,dx + \int_a^b [\![-x]\!]\,dx = b - a$

olduğunu gösteriniz.

5. Her $n \in N$ için

$$\int_0^n [\![x]\!]\,dx = \frac{n(n-1)}{2}$$

olduğunu gösteriniz.

6. $\int_0^9 [\![\sqrt{t}]\!]\,dt = 13$

olduğunu gösteriniz.

7. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int_0^2 |x^3 - 3x^2 + 2x|\,dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} |\cos^3 x|\,dx$

8. İntegrallenebilen bir f fonksiyonu için

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_0^1 f[a + (b-a)x]\,dx$$

olduğunu gösteriniz.

9. İntegrallenebilen bir f fonksiyonu ve $k \neq 0$ için

$$\int_a^b f(x)dx\,\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right)dx$$

olduğunu gösteriniz.

10. $u = 1 - x$ değişken değiştirmesini yaparak,

$m, n \in N$ için

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx = \int_0^1 (1-x)^n x^m\,dx$$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak

$$\int_0^1 x^2(1-x)^{10}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

11. $x = \sin u$ değişken değiştirmesi yardımıyla

$$\int_0^1 x^m(1-x^2)^n\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{2n+1} x\,dx$$

olduğunu gösteriniz. Bundan yararlanarak

$$\int_0^1 x^3(1-x^2)^{10}\,dx$$

integralini hesaplayınız.

12. Aşağıdaki integralleri hesaplayınız. ($n \in N$)

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx$ b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x\,dx$

13. $\int_{-\pi}^{\pi} |\cos^3 x + \sin^3 x|\,dx = \frac{10\sqrt{2}}{3}$

olduğunu gösteriniz.

14. Her $n \in N$ için

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

olduğunu gösteriniz.

15. $x = \frac{\pi}{2} - t$ değişken değiştirmesi yaparak

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}}{\sqrt[3]{\sin^2 x} + \sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

olduğunu gösteriniz.

16. $x = \pi - t$ dönüşümünden yararlanarak

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$$

olacağını gösteriniz.

17. $x \geq 1$ için $1 + x^4 \leq 2x^4$ eşitsizliğinden yararlanarak
$$\frac{26}{3} < \int_1^3 \sqrt{1+x^4}\, dx \leq \frac{26}{3}\sqrt{2}$$
olduğunu gösteriniz.

18. $x \geq 1$ için

a) $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \leq \int_1^x dt$

b) $0 \leq \ln x \leq x - 1$

olduğunu gösteriniz.

19. $f(x) = \begin{cases} 2x & , \ 4 \leq x \leq 5 \ \textit{ise} \\ 20 - 2x & , \ 5 < x \leq 6 \ \textit{ise} \end{cases}$

fonksiyonu için $\int_4^6 f(x)\,dx$ integralini hesaplayınız.

20. $f(x) = \begin{cases} |x-2| & , \ -2 \leq x \leq 1 \ \textit{ise} \\ |x| & , \ 1 < x \leq 2 \ \textit{ise} \end{cases}$

fonksiyonu için $\int_{-2}^2 f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

21. $0 \leq x \leq 1$ için

$0 \leq \sin x \leq x$ eşitsizliğinden yararlanarak

a) $0 \leq \int_0^1 \sin x^2\, dx \leq \frac{1}{3}$

b) $0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^{3/2} x\, dx \leq \frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{5/2}$

c) $0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x \sin x\, dx \leq \frac{1}{24}$

olduğunu gösteriniz.

22. $x \geq 0$ için $0 \leq \sin x \leq x$ eşitsizliğinden yararlanarak
$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} x \sin x\, dx = 0$$
olduğunu gösteriniz.

23. $a > 0$ ve f fonksiyonu $[0,a]$ üzerinde sürekli olsun.

i) $u = a - x$ değişken değiştirmesini yaparak
$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx$$
olduğunu gösteriniz.

ii) $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx = \frac{a}{2}$

olacağını gösteriniz.

iii) $\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{x^4 + (1-x)^4}$

integralini hesaplayınız.

24. Sürekli bir f fonksiyonu için
$$\int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(-x)dx$$
olduğunu gösteriniz.

25. $\int_0^1 f(x)dx = 3$ dür. f nin tek veya çift oluşuna göre $\int_{-1}^0 f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

26. $\int_a^b f(x)dx = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)dx$

olduğunu gösteriniz.

27. Periyodu T olan bir periyodik f fonksiyonu ve her k tamsayısı için
$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+kT}^{b+kT} f(x)dx$$
olacağını gösteriniz.

28. Aşağıda verilen fonsiyonların karşılarında yazılı aralıklar üzerindeki ortalama değerlerini bulunuz. Fonksiyon bu ortalama değeri hangi noktada alır?

a) $f(x) = 2\,|x|$, $\quad I = [-1,1]$

b) $f(x) = \cos x$, $\quad I = [0, 2\pi]$

c) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $\quad I = [-1,1]$

ç) $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$, $\quad I = [0,2]$

29. $\int_1^2 f(x)dx = 4$ olsun. $[1,2]$ aralığında $f(c) = 4$ olacak şekilde en az bir c noktasının varlığını gösteriniz.

30. Aşağıdaki fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.

a) $F(x) = \int_0^x t(1+t^2)^{20}\,dt$

b) $F(x) = \int_x^0 t \sin t\; dt$

c) $F(x) = \int_0^{x^2} t \sin t\; dt$

ç) $F(x) = \int_1^{-x} t\, \cos t^4\, dt$

d) $F(x) = \int_x^{x^2} \sqrt{1+t^2}\, dt$

e) $F(x) = \int_{\sin x}^{2x} \cos t\; dt$

31. Aşağıdaki eşitsizliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\frac{1}{6} \leq \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^{10}}\,dx < \frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{10} \leq \int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2}\,dx < \frac{1}{5}$

c) $\frac{e-1}{2} < \int_0^1 \frac{e^x}{1+x^3}\,dx < e - 1$

32. Sürekli f fonksiyonu için $f(2) = 3$ olduğuna göre,
$$\lim_{x \to 2} \frac{x}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt$$
limitini hesaplayınız.

33. $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \frac{du}{u + \sqrt{1+u^2}}$

limitini hesaplayınız.

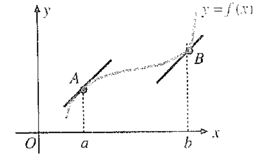
34. $\int_0^{x^2} f(t)\,dt = x \cos \pi x$

olduğuna göre $f(4)$ kaçtır?

35. $\int_0^{f(x)} t^2\,dt = x \cos \pi x$ olduğuna göre, $f(4)$ nedir?

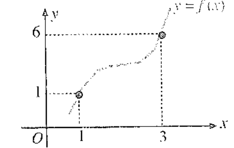
36. $m > 2$ için
$$\frac{1}{2} < \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^m}} < \frac{\pi}{6}$$
olduğunu gösteriniz.

37.



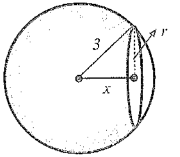
İkinci mertebeden sürekli türevlere sahip $y = f(x)$ eğrisinin A ve B noktalarındaki teğetleri birbirine paraleldir.
$$\int_a^b \frac{f''(x)}{f'(x)}\,dx$$
integralini hesaplayınız.

38.



Sürekli türeve sahip ve grafiği yukarıda verilen f fonksiyonu için
$$\int_1^3 \frac{f'(x)}{x}\,dx - \int_1^3 \frac{f(x)}{x^2}\,dx$$
ifadesini hesaplayınız.

39. Yarıçapı 3 birim olan küre, merkezinden x birim uzaklıkta bir düzlemle kesiliyor. Dairesel dik kesitin alanının ortalama değeri nedir?



1. $\int_0^2 [\![x^2]\!]dx = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$

olduğunu gösteriniz.

2. Her n ∈ N için

$$\int_0^{n^2} [\![\sqrt{t}]\!]\,dt = \frac{n(n-1)(4n+1)}{6}$$

olduğunu gösteriniz.

3. a) Her $n \in N$ için

$$f(x) = \int_0^n [\![t^2]\!]\,dt = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

olduğunu gösteriniz.

b) $x \geq 0$ için

$$f(x) = \int_0^x [\![t]\!]^2\,dt$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonunun $[0,3]$ aralığındaki grafiğini çiziniz.

4. a) Sürekli ve bir tek f fonksiyonu için

$$\int_0^{\pi} f(\cos x)dx = 0$$

olacağını gösteriniz.

b) Sürekli ve bir çift f fonksiyonu için

$$\int_0^{\pi} f(\cos x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$$

olduğunu gösteriniz.

5. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln\frac{1+x}{1-x}\,dx = 0$

olduğunu gösteriniz.

6. Sürekli bir $f : [a,b] \to R$ fonksiyonu için

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

ise (a,b) aralığında $f(c) = 0$ olacak şekilde en az bir c noktasının varlığını gösteriniz.

7. f ve g, $[a,b]$ üzerinde sürekli iki fonksiyon ve

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

olsun. $[a,b]$ de $f(c) = g(c)$ olacak şekilde en az bir c noktasının varlığını gösteriniz.

8. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\cos^3 x + b\sin^3 x}{\cos x + \sin x}\,dx$,

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a\sin^3 x + b\cos^3 x}{\sin x + \cos x}\,dx$

olsun.

$I = J = \frac{1}{4}(a+b)(\pi - 1)$ olduğunu gösteriniz.

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 + b^2\tan^2 x} = \frac{\pi}{2a(a+b)}$

olduğunu gösteriniz.

10. $f : [0,1] \to R$ fonksiyonu sürekli olsun. Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

a) $\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$

c) $\int_0^{\pi} x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

d) $\int_0^{\pi} f(\sin x)\, f(\cos x)dx = 0$

11. $f : R \to R$ fonksiyonu sürekli olsun. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx$

b) $\int_{-a}^{a} f(x^2)dx = 2\int_0^a f(x^2)dx$

c) $\int_{-a}^{a} x\, f(x^2)dx = 0$

12. f, esas periyodu p olan bir periyodik fonksiyon olsun.

$$\int_0^{np} f(x)dx = n\int_0^p f(x)dx$$

olacağını gösteriniz.

13. $f : [a,b] \to R$ fonksiyonu $[a,b]$ de integrallenebilir olsun.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

eşitliği ile tanımlanan F fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

14. $\frac{d}{dx}\int_0^{\ln x} f(t)dt = 1$ ise $f(x)$ nedir?

15. $\forall x$ için $f'(x) > 0$ ve $f(1) = 0$ olsun.

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

fonsiyonu için aşağıdaki önermelerden hangileri doğrudur?

a) g türevlenebilen bir fonksiyondur.

b) g, x de süreklidir.

c) $x = 1$, $y = g(x)$ in bir düşey asimtotudur.

d) g, $x = 1$ de yerel minimuma sahiptir.

e) $x = 1$, g nin bir dönüm noktasıdır.

f) $y = g'(x)$ eğrisinin grafiği $0x$- eksenini $x = 1$ de keser.

16. Her m reel sayısı için

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^m x}{\sin^m x + \cos^m x}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

olduğunu gösteriniz.



ARŞİMET (M.Ö. 287 – 212)

Arşimet, M.Ö. 287 yılında Sicilya adasının Siraküza şehrinde doğmuştur. Arşimet'in Siraküza kralı II. Hieron'un akrabası olduğu sanılmaktadır. Böyle olmasa bile kral tarafından korunduğu bilinmektedir. Bu nedenle Arşimet, parasal bir sıkıntı çekmeden, zamanını ilme verme fırsatını bulmuştur. Arşimet'in zekasını çok erken yaşlarda farkeden babası onu yönlendirmeyi bilmiştir.

Arşimet, daha sonra Mısır'ın İskenderiye kentine giderek Öklit'in derslerine devam etmiştir. Burada bilgisini geliştirdikten sonra, ülkesine dönmüş, öldürüldüğü güne kadar kendisini ülkesine ve ilme vererek araştırmalar yapmıştır.

Yunanlılar ve ortaçağ arapları Arşimet'e karşı son derece saygılı davranmışlardır. Onlar Arşimet'i tüm alimlerin başı, en büyük geometricisi olarak görüyorlardı. Gerçekten Arşimet gelmiş geçmiş en büyük üç matematikçiden biridir. Bunlar sırasıyla Arşimet, Newton ve Gauss'tur.

Arşimet'in yaşamı ve ölümü hakkında destan gibi yazılmış kitaplar vardır. Matematikte olduğu kadar, mekanikte gelmiş geçmiş en büyük dahilerden birisi de yine Arşimet'tir.

Tıpkı Newton ve Hamilton gibi, hesaplarına daldığı zaman, yemeklerini bile unutup yemezdi. "Bir cisim yerini değiştirdiği sıvı hacminin ağırlığı kadar ağırlığından kaybeder." sonucunu veren ünlü buluşunu yaptığı gün banyosundan dışarı fırlamış, sokaklarda çıplak olarak koşmuştur. Bu onun sıvılar için bulduğu birinci kanundu. Bu buluşun ilginç öyküsü fen öğretmenleri tarafından öğrencilere anlatılmaktadır.

Arşimet'e mekanik ilminin yaratıcısı gözüyle bakılır. İlkel insanlarda bile, bir taşı veya ağır bir cismi yerinden kaldırmak veya yuvarlamak için sopalar kullanılmıştır. Fakat yine evrenin bu gizli sırrını kaldıraç kanunlarıyla ilk kez açıklayan yine Arşimet olmuştur.

"Bana istediğim uzunluk ve sağlamlıkta bir çubuk ve bir dayanak noktası verin, dünyayı yerinden oynatayım." sözü ona aittir.

Dairenin alanı, çemberin uzunluğu, kürenin yüzey alanı ve hacmi ilk kez yine Arşimet tarafından bulunmuştur. π sayısının hesabı yine ona aittir.

Alan ve hacim hesaplarında bulduğu yöntemler uzun yıllar kullanılmıştır. En karmaşık eğrilerle sınırlı bölgelerin alanları ve yüzeylerle sınırlı bölgelerin hacimleri onun bu buluşları ve yöntemleriyle hesaplanmıştır. Hatta Newton'a integral kavramı fikrini Arşimet'in bu yöntemleri vermiştir.

Arşimet, dairenin çevresinin çapına bölümü olan π sayısının bulunması hakkında bir yöntem geliştirmiş, bu sayının $3\frac{1}{7}$ ile $3\frac{10}{71}$ arasında olduğunu göstermiştir. Aynı zamanda kareköklerin yaklaşık değerlerini bulmak için yöntemler geliştirmiştir. Bu yöntem, devirli ondalık gösterimleri bulan Hint'lilere ilham vermiştir.

Arşimet, Yunanlıların matematiğini geride bırakmıştır. Çünkü Yunanlılar herbir sayıyı bir şekille gösteriyorlardı. Arşimet pratik olmayan bu gösterim yerine yeni bir numaralama sistemi buldu. Bu sistem sayesinde istenildiği kadar büyük sayılar yazılıp söylenebiliyordu.

Arşimet M.Ö. 212 yılında Siraküza'yı işgal eden Romalı askerler tarafından öldürülmüştür.

İnsanlar rakamlara benzer, bulundukları yere göre değer kazanır.

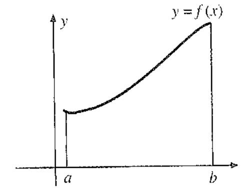
Napoleon BENAPARTE

7 İNTEGRALLERİN UYGULAMALARI

İntegrallerin Geometri, Fizik, Mühendislik ve İstatistikte çok geniş uygulamaları vardır. Bu bölümde, bu uygulamalardan bazılarına yer vereceğiz.

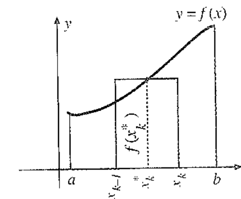
1 ALAN HESABI

f, $[a,b]$ aralığında bir sürekli fonksiyon olsun. $y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve Ox– ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulalım. Bu alan, $[a,b]$ aralığında $f(x)$ in işaretine göre değişik biçimlerde hesaplanır.



(1) $[a,b]$ aralığında $f(x) \geq 0$ olsun. $[a,b]$ aralığının bir parçalanışını $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ile gösterelim. $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ olsun. Hesaplanması istenen A alanı, yaklaşık olarak eni Δx_k, boyu $f(x_k^*)$ olan dikdörtgenlerin alanları toplamına eşittir. Şu halde

$$A \cong \sum_{k=0}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$



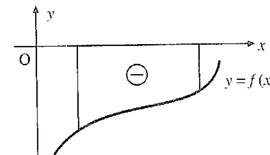
yazılabilir. Δx_k lar ne kadar küçük seçilirse yaklaşıklık o kadar iyi olur. Buna göre,

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

yazılabilir. Sağ taraftaki limit f nin $[a,b]$ üzerindeki integrali olacağından,

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

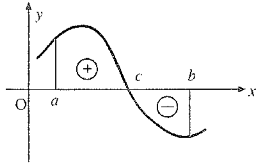
bulunur.



(2) $[a,b]$ aralığında $f(x) \leq 0$ ise, sözkonusu dikdörtgenlerin boyları $-f(x_k^*)$ olacağından, alan formülü

$$A = \int_a^b -f(x)\,dx$$

şeklini alacaktır.



(3) Eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığının bazı yerlerinde pozitif, bazı yerlerinde negatif ise, fonksiyonunun pozitif ve negatif olduğu bölgelerdeki alanlar ayrı ayrı bulunup toplanır. Örneğin f fonksiyonu (a,c) de pozitif, (c,b) aralığında negatif ise,

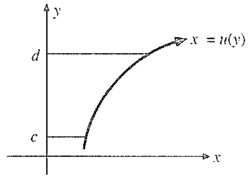
$$A=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b -f(x)\,dx$$

olacaktır.

Yukarıdaki tüm alan formüllerinin hepsi bir tek formülle

$$A=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

biçiminde verilebilir.



Benzer şekilde, $x=u(y)$ eğrisi, $y=c$, $y=d$ doğruları ile $0y$– ekseni tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin alanı

$$A=\int_c^d |u(y)|\,dy$$

olacaktır.

ÖRNEK : $y=x^2$ eğrisi, $x=3$, $x=6$ doğruları ve $0x$– ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm : Sözkonusu alan $0x$– ekseninin üst tarafında bulunduğundan

$$A=\int_3^6 f(x)\,dx=\int_3^6 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_3^6=72-9=63$$

birimkare olur.

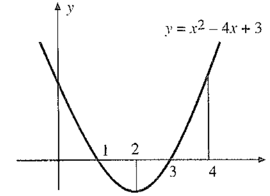
ÖRNEK : Dördüncü bölgede, $y=x^3-3x$ eğrisi ile Ox– ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm : Alanı istenen bölgede $f(x)\le 0$ olduğundan

$$A=\int_0^{\sqrt{3}} -f(x)\,dx=-\int_0^{\sqrt{3}}(x^3-3x)\,dx$$

$$=-\left(\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt{3}}=-\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}\right)=\frac{9}{4}\ \text{br}^2$$

olur.



ÖRNEK : $y=x^2-4x+3$ eğrisi, $x=2$, $x=4$ doğruları ve $0x$– ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm : $[2,3]$ aralığında $f(x)\le 0$, $[3,4]$ aralığında $f(x)\ge 0$ olduğundan

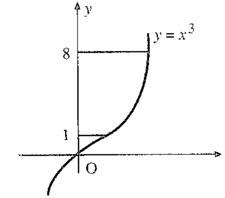
$$A=\int_2^3 -f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx$$

$$=-\int_2^3 (x^2-4x+3)\,dx+\int_3^4 (x^2-4x+3)\,dx$$

$$=-\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_2^3+\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_3^4$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{6}{3}=2\ br^2$$

olur.



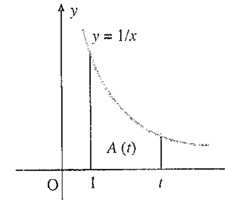
ÖRNEK : $y=x^3$ eğrisi, $y=1$, $y=8$ doğruları ve $0y$– ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm : $y=x^3 \Rightarrow x=y^{1/3}$ olur.

$$A=\int_1^8 u(y)\,dy=\int_1^8 y^{1/3}\,dy=\frac{3}{4}y^{4/3}\Big|_1^8$$

$$=\frac{3}{4}(16-1)=\frac{45}{4}\ br^2$$

bulunur.



ÖRNEK : $y=\frac{1}{x}$ eğrisi, $x=1$ ve $x=t$ $(t\ge 1)$ doğruları ile $0x$– ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm :

$$A=A(t)=\int_1^t \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|\Big|_1^t=\ln t$$

olur. Şu halde herbir t sayısına pozitif bir $A(t)$ sayısı karşılık gelmektedir. Bu alan $\ln t$ olduğundan, logaritma fonksiyonu integral yardımıyla ve dolayısıyla $A(t)$ alanı yardımıyla da tanımlanabilir. $A(t)$ alanına t nin doğal logaritması denir. Logaritmanın özellikleri bu alanın özelliklerinden elde edilebilir. Örneğin $A(1)=0$ olduğundan

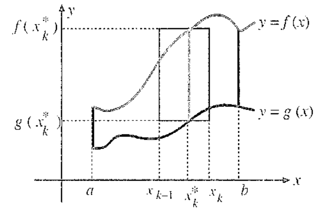
$\ln 1=0$,

$A(e)=1$ olduğundan

$\ln e=1$

olur.

7.2 İKİ EĞRİ ARASINDAKİ ALANIN HESABI



f ve g, $[a,b]$ aralığında sürekli iki fonksiyon ve P de $[a,b]$ nin bir parçalanması olsun.

(1) $[a,b]$ aralığında $f(x) \geq g(x)$ ise, dikdörtgenlerin boyları $f(x_k^*) - g(x_k^*)$ olur. Dolayısıyla $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları arasındaki alan, yaklaşık olarak,

$$A \cong \sum_{k=1}^{n} \left[f(x_k^*) - g(x_k^*) \right] \Delta x_k$$

olur. P parçalanması ne kadar ince alınırsa, bu değer gerçek alana o kadar yakın olur. Parçalanmanın normu sıfıra yaklaştığında sağ taraftaki ifadenin limiti $f(x) - g(x)$ in integrali olacağından

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x) \right] dx$$

bulunur.

(2) $[a,b]$ aralığında $f(x) \leq g(x)$ ise, dikdörtgenlerin boyları $g(x_k^*) - f(x_k^*)$ olacağından

$$A = \int_a^b \left[g(x) - f(x) \right] dx$$

bulunur.

(3) $[a,b]$ aralığının bazı yerlerinde $f(x) \leq g(x)$, bazı yerlerinde $f(x) \geq g(x)$ ise, dikdörtgenlerin boyları bazı yerlerde $f(x_k^*) - g(x_k^*)$, bazı yerlerde $g(x_k^*) - f(x_k^*)$ olur. Dolayısıyla $\left| f(x_k^*) - g(x_k^*) \right|$ olur. Buna göre sözkonusu olan

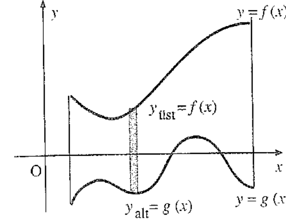
$$A = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$$

olacaktır.

Şu halde $[a,b]$ aralığında f ile g nin durumları ne olursa olsun, $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin alanı

$$A = \int_a^b \left| f(x) - g(x) \right| dx$$

olacaktır.



Bu alanı hesaplarken şu yolu izlemekte yarar vardır :

(1) $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları çizilip alanı istenen bölge belirtilir.

(2) Bölge içinde kalacak şekilde $0y$– eksenine paralel bir şerit çizilir.

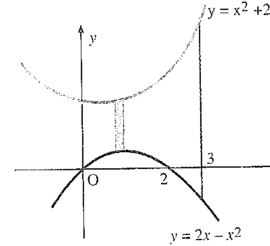
(3) Şeridin üst ucundaki ve alt ucundaki eğrileri tespit edilir.

(4) Üst ucundaki eğriden alt ucundaki eğri çıkartılıp $y_{üst} - y_{alt}$ farkı bulunur.

(5) Bulunan fark a dan b ye kadar integrallenir; yani

$$A = \int_a^b \left(y_{üst} - y_{alt} \right) dx$$

integrali hesaplanır.



ÖRNEK : $y = x^2 + 2$, $y = 2x - x^2$ parabolleri ile Oy– ekseni ve $x = 3$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm :

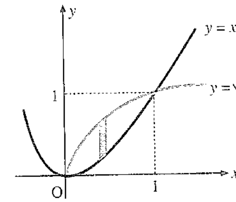
$y_{üst} = x^2 + 2$, $y_{alt} = 2x - x^2$ olduğundan

$$A = \int_0^3 (y_{üst} - y_{alt})\, dx = \int_0^3 (x^2 + 2 - 2x + x^2)\, dx$$

$$= \int_0^3 (2x^2 - 2x + 2)\, dx = \frac{2}{3} x^3 - x^2 + 2x \Big|_0^3$$

$$= 18 - 9 + 6 = 15$$

birimkare olur.



ÖRNEK : $y = x^2$ ve $x = y^2$ parabolleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm : Önce parabollerin kesim noktalarını bulalım.

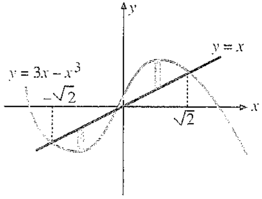
$$\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow y = (y^2)^2 \Rightarrow y = y^4 \Rightarrow y = 0$$ ve $y = 1$ bulunur. $y = 0$ için $x = 0$,

$y = 1$ için $x = 1$ olacağından, eğrilerin kesim noktaları $(0,0)$ ve $(1,1)$ dir.

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^2 \right) dx = \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \quad br^2$$

olur.

ÖRNEK : $y = 3x - x^3$ eğrisiyle $y = x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.



Çözüm : Eğrilerin kesim noktalarını bulalım.

$$3x - x^3 = x \Rightarrow x^3 - 2x = 0 \Rightarrow \quad x_1 = -\sqrt{2}\ ,\ x_2 = 0,\ x_3 = \sqrt{2}$$

olur. Soldaki bölgede üstteki eğri $y = x$, alltaki eğri $y = 3x - x^3$ dür. İkinci bölgede üstteki eğri $y = 3x - x^3$, alltaki eğri $y = x$ dir. Dolayısıyla

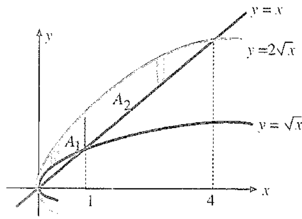
$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{0} (x - 3x + x^3)\, dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} (3x - x^3 - x)\, dx$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^{0} (x^3 - 2x)\, dx + \int_{0}^{\sqrt{2}} (2x - x^3)\, dx$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - x^2\right)\Bigg|_{-\sqrt{2}}^{0} + \left(x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{0}^{\sqrt{2}} = 1 + 1 = 2$$

br^2 olur.

ÖRNEK : $y = \sqrt{x},\ \ y = 2\sqrt{x}$ eğrileri ile $y = x$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.



Çözüm : $y = x$ ile $y = \sqrt{x}$, (0,0) ve (1,1) noktalarında $y = x$ ile $y = 2\sqrt{x}$ de (0,0) ve (4,4) noktalarında kesişir.

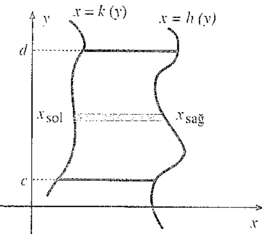
Birinci bölgede üstteki eğri $y = 2\sqrt{x}$, alttaki eğri $y = \sqrt{x}$ dir. İkinci bölgede üstteki eğri $y = 2\sqrt{x}$, alttaki eğri $y = x$ dir. Buna göre,

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 (2\sqrt{x} - \sqrt{x})\, dx + \int_1^4 (2\sqrt{x} - x)\, dx$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 + \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{2}{3} + \frac{11}{6} = \frac{5}{2}$$

br^2 olur.

Benzer şekilde, h ve k fonksiyonları $[c,d]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar ise, $x = h(y)$, $x = k(y)$ eğrileri ile $y = c$ ve $y = d$ doğruları arasında kalan bölgenin alanı



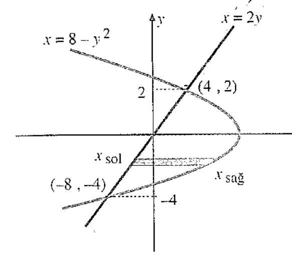
$$A = \int_c^d |h(y) - k(y)|\, dy$$

olur. İntegrali hesaplarken sağdaki eğriden soldaki eğri çıkarılmalıdır. Bu durumda mutlak değere ihtiyaç kalmaz. O halde

$$A = \int_c^d \left(x_{sağ} - x_{sol}\right) dy$$

olacaktır.

ÖRNEK : $x = 2y$ doğrusuyla $x = 8 - y^2$ eğrisi arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.



Çözüm : Doğru ile eğrinin kesim noktalarını bulalım. $x = 8 - y^2$ de $x = 2y$ konursa

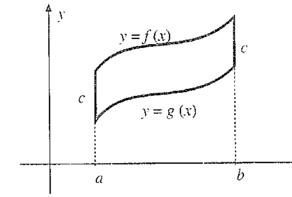
$$2y = 8 - y^2 \Rightarrow y^2 + 2y - 8 = 0 \Rightarrow y_1 = -4\ ,\ \ y_2 = 2$$

olur. $x_1 = 2y_1 = -8$, $x_2 = 2y_2 = 4$ olacağından, doğru ile eğri (– 8 , – 4) ve (4,2) noktalarında kesişir.

$$A = \int_{-4}^{2} \left(8 - y^2 - 2y\right) dy = 8y - \frac{y^3}{3} - y^2\Bigg|_{-4}^{2} = 36\ \ br^2$$

olur.

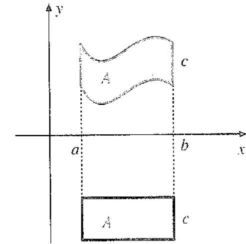
ÖRNEK : Bir bölgenin alt ve üst sınırlarını oluşturan $y = f(x)$ ve $y = g(x)$ eğrileri için $f(x) - g(x) = c > 0$ dır. Bu eğrilerle $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz. Bulduğunuz bu sonucu yorumlayınız.



Çözüm :

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right] dx = \int_a^b c\, dx = c\int_a^b dx = c(b - a)$$

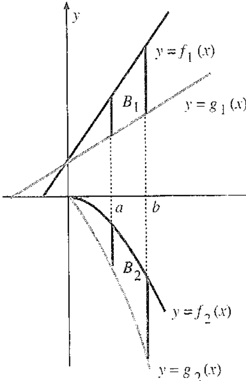
olur. Bu, eni $b - a$, boyu c olan dikdörtgenin alanından başka birşey değildir. Şu halde bir bölgenin alt ve üst sınırları arasındaki fark sabit ise bu bölgenin alanı eni ile boyunun çarpımına eşittir.



Bu özelliğin genel hali, integral kavramı bilinmediği halde 1635 yılında **Cavalieri** tarafından ortaya konmuştur.

1. CAVALIERI PRENSİBİ

Eğer iki bölge [a,b] aralığının her noktasında aynı yüksekliğe sahipse bu iki bölgenin alanları eşittir.



Cavalieri prensibi integralin çok basit bir uygulamasıdır. B_1 bölgesi $y = f_1(x)$, $y = g_1(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölge, B_2 de $y = f_2(x)$, $y = g_2(x)$ eğrileri ile $x = a$, $x = b$ doğruları arasında kalan bölge olsun. Her $x \in [a, b]$ için

$$f_1(x) - g_1(x) = f_2(x) - g_2(x)$$

olduğunu kabul edelim.

$$\text{Alan } (B_1) = \int [f_1(x) - g_1(x)]\, dx = \int [f_2(x) - g_2(x)]\, dx$$

$$= \text{Alan } (B_2)$$

olur.

g ve h türevlenebilir iki fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$$

parametrik denklemleri ile verilen bir C eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve $0x$–ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını hesaplamak için

$$A = \int_a^b |y|\, dx$$

olan formülünü t cinsinden ifade etmek gerekir. $y = h(t)$, $dx = g'(t)\, dt$ olur. t nin a ve b ye karşılık gelen değerlerine, sırası ile, t_1 ve t_2 denirse

$$A = \int_{t_1}^{t_2} |h(t)|\, g'(t)\, dt$$

olur. Benzer şekilde verilen eğri, $y = c$, $y = d$ doğruları ve Oy– ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanı, t_3 ve t_4, c ve d sayılarına karşılık gelen parametreler olmak üzere,

$$A = \int_{t_3}^{t_4} |g(t)|\, h'(t)\, dt$$

olur.

ÖRNEK : $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ parametrik denklemiyle verilen elipsin (elips tarafından çevrelenen bölgenin) alanını bulunuz.

Çözüm : Önce elipsin dörtte bir parçasının alanını bulalım.

$x = 0$ için $t = \frac{\pi}{2}$, $x = a$ için $t = 0$

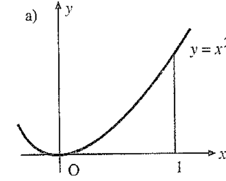
olacağından

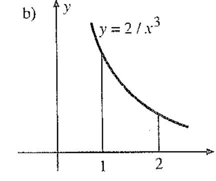
$$A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b|\sin t|.(-a\sin t)\, dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt$$

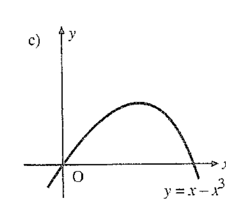
$$= 4\,ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2t}{2}\, dt = 2ab\,(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab$$

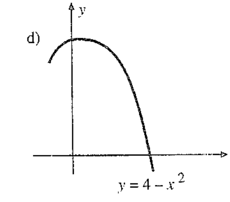
br^2 bulunur.

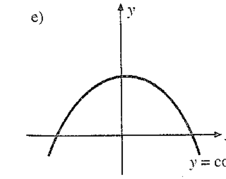
1. Aşağıdaki taralı bölgelerin alanlarını bulunuz.

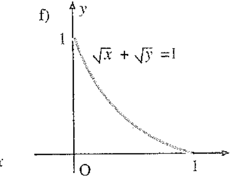
a) 

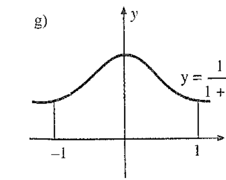
b) 

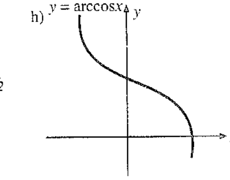
c) 

d) 

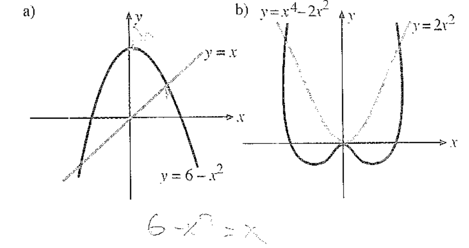
e) 

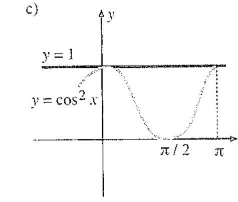
f) 

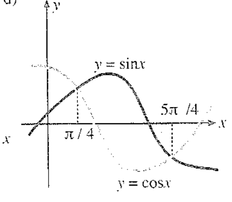
g) 

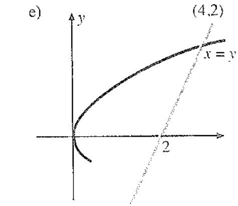
h) 

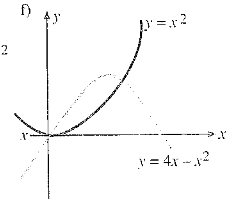
2. Aşağıdaki taralı bölgelerin alanlarını hesaplayınız.

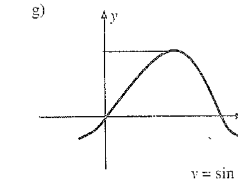
a) b) 

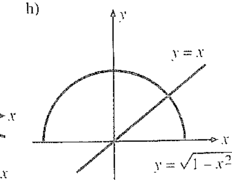
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

3. Aşağıda denklemleri verilen eğri, doğrular ve 0x–ekseni arasında kalan kapalı bölgelerin alanlarını bulunuz.

(a) $y = x^2 + 2x$, $x = -1$, $x = 3$

(b) $y = x^3 - x$, $x = -2$, $x = 1$

(c) $y = \cos x - \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$

(ç) $y = 4x - x^2$, $x = 1$, $x = 2$

(d) $y = \tan x$, $x = -\frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{6}$

(e) $y = \sin^2 x \cos x$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{4}$

(f) $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 1$, $x = 3$

4. Aşağıda denklemleri verilen eğriler ile $0x$-ekseni arasında kalan bölgelerin alanlarını bulunuz.

(a) $y = 2x - x^2$

(b) $y = 25 - x^2$

(c) $y = 6x - x^3$

(d) $y = \sqrt{4 - x^2}$

5. Aşağıda denklemleri verilen eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını bulunuz.

(a) $y = x^2$, $y = 8 - x^2$

(b) $y = x^2$, $y = x^3$

(c) $y = x^3$, $y = 2x - x^2$

(ç) $y = \frac{1}{3}x^2$, $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$

(d) $y = x^3$, $y = 32\sqrt{x}$

(e) $y = x^3$, $y = x^{1/3}$

(f) $y = x^2 + 3$, $y = 12 - x^2$

(g) $y = x^3 + x$, $y = 3x^2 - x$

(h) $y = x^3 + 1$, $y = (x + 1)^2$

(ı) $y = x^4 - 4$, $y = 3x^2$

(i) $y = x^3$, $y = 2x^3 + x^2 - 2x$

(j) $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x^2}$

(k) $y = x^4$, $y = 32 - x^4$

(l) $x = 8 - y^2$, $x = y^2 - 8$

(m) $x = y^2$, $x = 32 - y^2$

(n) $x = y^2 - 2y - 2$, $x = 4 + y - 2y^2$

(o) $y^2 = 3x$, $y = x^2 - 2x$

(ö) $y^2 = x$, $y^2 = 2(x - 3)$

(p) $y^2 = 6x$, $x^2 = 6y$

6. Aşağıda denklemleri verilen doğru ve eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını bulunuz.

(a) $y = x^3$, $y = x$

(b) $y = x^2$, $y = 2x$

(c) $y = 2x^2$, $y = 5x - 3$

(ç) $y = x^2 + 1$, $y = 2x + 9$

(d) $y = x^2$, $y = 4$

(e) $x = y^2$, $y = x - 2$

(f) $y^2 = 2x - 5$, $y = x - 4$

(g) $x = 4y^2$, $x + 12y + 5 = 0$

(h) $x = y^2$, $x = 4$

(ı) $y = \frac{1}{1 + x^2}$, $y = \frac{1}{2}x^2$

7. Aşağıda denklemleri verilen eğri ve doğrular tarafından sınırlanan kapalı bölgelerin alanlarını bulunuz.

(a) $y = x^2 + 4$, $y = x - 2$, $x = -3$, $x = 0$

(b) $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $x = \frac{1}{2}$, $x = 2$

(c) $y = x^2$, $y = x^3$, $x = -2$, $x = -1$

(ç) $y = x^2$, $y = -1$, $x = -1$, $x = 2$

(d) $y = x^3$, $y = -x$, $y = x + 6$

(e) $y = x + 2$, $y = -3x + 6$, $y = \frac{1}{3}(2 - x)$

(f) $y = 4 - |x|$, $x = -2$, $x = 2$, $y = 0$

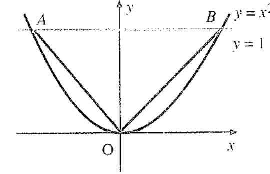
8. $y = x^2$ denklemli parabol, bu parabole (1,1) noktasında teğet olan doğru ve $0y$- ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

9. $y = x^3 - x$ eğrisi ile bu eğriye $x = -1$ apsisli noktada teğet olan doğru arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

11. $k \in N$ olmak üzere, $y = x^k$ ile $y = x^{k+1}$ eğrileri veriliyor. Bu iki eğri arasında kalan bölgenin alanı $A(k)$ olsun. $\sum_{k=1}^{n} A(k)$ ifadesini bulunuz.

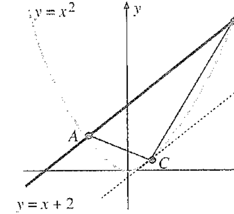
12.



Şekildeki $y = x^2$ parabolü ile $y = 1$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanı p, AOB üçgeninin alanı q olduğuna göre, $p : q$ nedir?

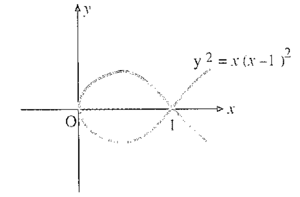
13. $(y - x)^2 = x^3$ eğrisiyle $x = 1$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

14.



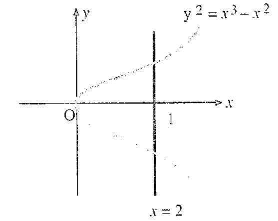
$y = x^2$ parabolü ile $y = x + 2$ doğrusunun kesim noktaları A ve B dir. Parabolün, AB doğrusuna paralel olan teğetinin değme noktası C olduğuna göre, parobolle $y = x + 2$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanının ABC üçgeninin alanına oranı nedir?

15.



Şekildeki taralı bölgenin alanını bulunuz.

16.



Şekildeki taralı bölgenin alanını bulunuz.

17. $y = -x^2 - 2x + 3$ parabolü, bu parabole $(2, -5)$ noktasından çizilen teğet ve y– ekseni arasında kalan bölgenin hacmini bulunuz.

18. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$

astroid eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

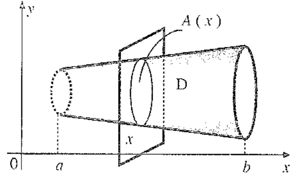
19. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

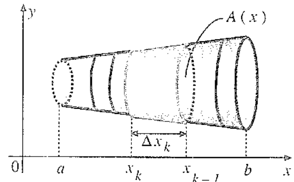
sikloid eğrisinin bir yayı ile Ox– ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

7.4 HACİM HESABI

Bir katı cismin hacmini, integral yardımıyla, çeşitli yollardan hesaplamak mümkündür. Bu yöntemlerden üçünü bu kesimde vermeye çalışacağız.

7.4.1 KESİT YÖNTEMİ





Üç boyutlu uzaydaki bir D bölgesinin (cisminin) şu özelliklere sahip olduğunu kabul edelim :

Cisim $[a,b]$ aralığı üzerine yerleştirilmiş ve bu aralıktaki herbir x noktasında Ox–eksenine dik olan düzlemle cismin $A(x)$ arakesiti x in bir sürekli fonksiyonudur.

$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $[a,b]$ aralığının bir parçalanması ve x_k^*, $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının herhangi bir noktası olsun. Her x_k^* noktasından x eksenine dik olarak çizilen düzlemler D cismini n parçaya böler. Her parçacığın hacmi, yaklaşık olarak $A(x_k^*)$ kesit alanı ile Δx_k yüksekliğinin (kalınlığının) çarpımına eşittir. Dolayısıyla D bölgesinin V hacmi için

$$V \cong \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x_k$$

yazılabilir. P ne kadar ince seçilirse, yaklaşıklık o kadar iyi olur. Buna göre

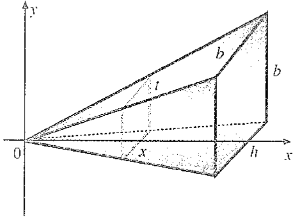
$$V = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} A(x_k^*)\Delta x_k$$

yazılabilir. Sağdaki toplam bir integral toplam olduğundan

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

bulunur.

ÖRNEK : Tabanı, bir kenarı b birim olan bir kare ve yüksekliği h birim olan piramidin hacmini bulunuz.



Çözüm : Piramidi, yandaki şekilde olduğu gibi, $0x$– ekseni üzerinde $[0,h]$ aralığına yerleştirelim. Cismin $0x$– eksenine dik düzlemlerle arakesiti birer karedir. Apsisi x olan noktadaki kesitin (karenin) bir kenarı t birim olsun.

$$\frac{t}{b} = \frac{x}{h} \Rightarrow t = \frac{b}{h}x$$

olacağından kesitin alanı

$$A(x) = t^2 = \frac{b^2}{h^2}x^2$$

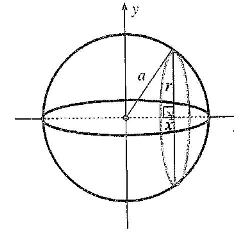
olur. Buna göre,

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \int_0^h \frac{b^2}{h^2}x^2\,dx$$

$$= \frac{b^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}b^2h$$

olur. O halde bir piramidin hacmi, taban alanı ile yüksekliğinin çarpımının üçtebirine eşittir.

ÖRNEK : a yarıçaplı bir kürenin hacmini hesaplayınız.



Çözüm : Kürenin merkezinden x birim uzaktaki dik kesitin alanı $A(x)$ olsun. Bu kesit bir daire olup alanı

$$A(x) = \pi r^2 = \pi(a^2 - x^2)$$

birimdir. Buna göre,

$$V = \int_0^a A(x)\,dx = \pi\int_0^a (a^2 - x^2)$$

$$= \pi(a^2x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^a = \frac{4}{3}\pi a^3$$

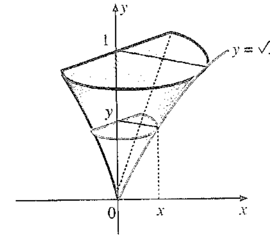
olur.

Eğer hacmi istenin cismin Oy– eksenine dik kesitlerinin alanı biliniyorsa $[c,d]$ aralığına yerleştirilen cismin hacmi

$$V = \int_c^d A(y)\,dy$$

olur.

ÖRNEK : Yandaki şekilde verilen cismin Oy– eksenine dik düzlemlerle arakesitleri birer yarım dairedir. Bu cismin hacmini bulunuz.



Çözüm : Ordinatı y olan noktadaki kesitin alanı

$$A(y) = \frac{1}{2}\pi x^2 = \frac{1}{2}\pi(y^2)^2 = \frac{\pi}{2}y^4$$

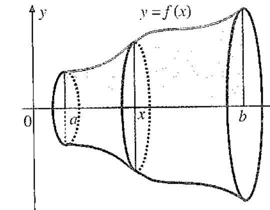
olacağından, cismin hacmi

$$V = \int_0^1 A(y)\,dy = \int_0^1 \frac{\pi}{2}y^4\,dy = \frac{\pi}{10}$$

birimküb olur.

Dönel cisimlerin hacimlerini hesaplamada belli başlı iki yöntem vardır. Şimdi bu yöntemleri verelim.

7.4.2 DİSK YÖNTEMİ



$y = f(x)$ eğrisi, $x = a$, $x = b$ doğruları ve $0x$– ekseni arasında kalan B bölgesi Ox– ekseni etrafında döndürüldüğünde meydana gelen dönel cismin hacmini bulalım.

$[a,b]$ aralığındaki herhangi bir noktada dikkesit alındığında dik kesit daima bir daire olur. Dik kesitin alındığı noktanın apsisi x ise dikkesitin alanı

$$A(x) = \pi[f(x)]^2, \quad a \le x \le b$$

olur. Kesit yöntemine göre, cismin hacmi

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

birimküb olur.

Benzer şekilde $x = g(y)$ eğrisi, $y = c$ ve $y = d$ doğruları ile Oy– ekseni tarafından sınırlanan bölgenin Oy– ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmi

$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2\, dy$$

olur.

ÖRNEK : $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ eğrisi, $x = 1$ ve $x = e$ doğruları ile Ox ekseni arasında kalan bölge Ox– ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm:

$$V = \pi \int_1^e \frac{1}{x}\, dx = \pi \ln|x| \Big|_1^e = \pi \ br^3$$

olur.

ÖRNEK : $y = \ln x$ eğrisi, x ekseni, y ekseni ve $y = 1$ doğrusu arasında kalan bölge Oy– ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

Çözüm : $y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$ dir.

$$V = \pi \int_0^1 [f(y)]^2\, dy = \pi \int_0^1 (e^y)^2\, dy = \pi \int_0^1 e^{2y}\, dy$$

$$= \pi . \frac{1}{2} e^{2y} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}(e^2 - 1) \ br^3$$

olur.

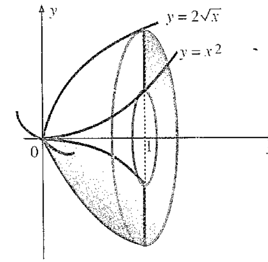
$[a,b]$ aralığında $0 \le g(x) \le f(x)$ olsun. $y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri, $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin Ox– ekseni etrafında dönmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmi

$$V = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\, dx$$

olacaktır. Bu, $ABFE$ bölgesinin dönmesiyle elde edilen hacimden $ABCD$ bölgesinin dönmesiyle elde edilen hacmin çıkarılmasından yani

$$\pi \int_a^b f^2(x)\, dx - \pi \int_a^b g^2(x)\, dx$$

farkından başka birşey değildir.



ÖRNEK : $y = 2\sqrt{x}$, $y = x^2$ eğrileri ile $x = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölgenin Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

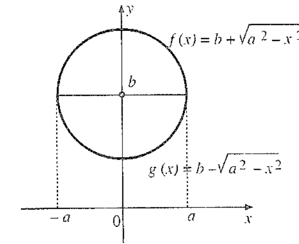
Çözüm :

$$V = \pi \int_0^1 [(2\sqrt{x})^2 - (x^2)^2]\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 (4x - x^4)\, dx = \pi (2x^2 - \frac{x^5}{5}) \Big|_0^1$$

$$= \pi (2 - \frac{1}{5}) = \frac{9}{5}\pi \ br^3$$

olur.



ÖRNEK : $0 < a < b$ olsun. Merkezi $(0,b)$ de bulunan a yarıçaplı bir çember tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin Ox– ekseni etrafında döndürülmesi ile elde edilen dönel cismin (torun) hacmini bulunuz.

Çözüm : Verilen çemberin denklemi $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ dir. Bu eşitlikten y çekilirse $y_1 = b + \sqrt{a^2 - x^2} = f(x)$, $y_2 = b - \sqrt{a^2 - x^2} = g(x)$ bulunur. Sözü edilen bölge yandaki şekilde gösterilmiştir. Buna göre istenen hacim

$$V = \pi \int_{-a}^{a} [(b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2]\, dx$$

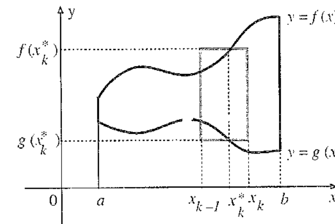
$$= 4\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 8\pi b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

$$= 8\pi b \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 8\pi b \, (a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt)$$

$$= 8\pi a^2 b \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2}\, dt = 2\pi^2 a^2 b$$

birimküb olur.

7.4.3 KABUK YÖNTEMİ



$y = f(x)$, $y = g(x)$ eğrileri ile $x = a$ ve $x = b$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin Oy– ekseni etrafında döndürülmesi ile meydana gelen dönel cismin hacmini bulalım.

$[a,b]$ aralığının bir parçalanması $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ olsun.

Herbir $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında bir x_k^* seçelim. Boyu $|f(x_k^*) - g(x_k^*)|$, eni Δx_k olan dikdörtgenin Oy– ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen silindirik tabakanın hacmi

$$\Delta V_k = \left|\pi x_k^2 - \pi x_{k-1}^2\right| . \left|f(x_k^*) - g(x_k^*)\right|$$

$$= 2\pi . \left|\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right| . \left|f(x_k^*) - g(x_k^*)\right| . \Delta x_k$$

olur. İstenen V hacmi, yaklaşık olarak bu ΔV_k hacimlerinin toplamına eşittir. Buna göre,

$$V \cong 2\pi \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right| \left|f(x_k^*) - g(x_k^*)\right| \Delta x_k$$

olur. Parçalanma ne kadar ince alınırsa yaklaşıklık o kadar iyi olur. $\|P\| \to 0$ yapılırsa, $\frac{x_{k-1} + x_k}{2} \cong x_k^*$ olacağından

$$V = \lim_{\|P\| \to 0} 2\pi \sum_{k=1}^{n} \left|x_k^*\right| \left|f(x_k^*) - g(x_k^*)\right| \Delta x_k$$

bulunur. Eğer $f - g$ integrallenebilir ise sağ taraftaki limit

$$2\pi \int_a^b \left|x\,[f(x) - g(x)]\right| dx$$

integraline eşit olacağından

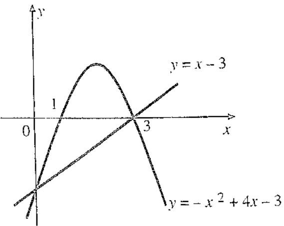
$$V = 2\pi \int_a^b \left|x[f(x) - g(x)]\right| dx$$

bulunur.

Benzer olarak $x = u(y)$, $x = v(y)$ eğrileri, $y = c$ ve $y = d$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmi

$$V = 2\pi \int_c^d \left|y[u(y) - v(y)]\right| dy$$

olur.



ÖRNEK : $y = -x^2 + 4x - 3$ parabolü ile $y = x - 3$ doğrusu arasında kalan bölge Oy– ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

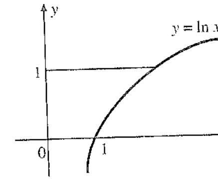
Çözüm :

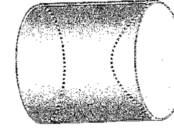
$$V = 2\pi \int_0^3 \left|x\,(-x^2 + 4x - 3 - x + 3\right| dx$$

$$= 2\pi \int_0^3 \left|x^2(-x+3)\right| dx = 2\pi \int_1^3 (-x^3 + 3x^2)\, dx$$

$$= 2\pi\,(-\frac{x^4}{4} + x^3)\Big|_0^3 = \frac{27}{2}\pi \ br^3$$

olur.





ÖRNEK : $y = \ln x$ eğrisi, Ox– ekseni, Oy– ekseni ve $y = 1$ doğrusu tarafından sınırlanan bölge Ox– ekseni etrafında döndürülüyor. Elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

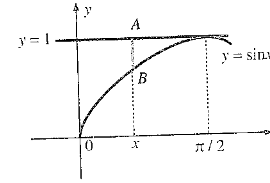
Çözüm : $y = \ln x \Rightarrow x = e^y$ olur.

$$V = 2\pi \int_0^1 \left|y(e^y - 0)\right| dy = 2\pi \int_0^1 y e^y\, dy$$

$$= 2\pi\,(y-1)e^y\Big|_0^1 = 2\pi \ br^3$$

bulunur.

Aynı soruyu disk yöntemiyle çözüp sonuçları karşılaştırınız.



ÖRNEK : $y = \sin x$, $y = 1$, $x = 0$ tarafından sınırlanan kapalı bölgenin $y = 1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

Çözüm : $y = \sin x$ eğrisinin dönme ekseni olan $y = 1$ doğrusuna olan uzaklığı

$$|AB| = 1 - \sin x$$

olduğundan

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} (1 - \sin x)^2\, dx = \pi \int_0^{\pi/2} (1 - 2\sin x + \sin^2 x)\, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} \left[1 - 2\sin x + \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right] dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} (\frac{3}{2} - 2\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x)\, dx$$

$$= \pi\,(\frac{3}{2}x + 2\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{4}\pi^2 - 2\pi$$

birimküb olur.

Eğer Ox– ekseni etrafında döndürülen bölgenin sınır eğrisi

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2$$

biçiminde parametrik olarak verilirse, yapılacak iş

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx$$

integralini

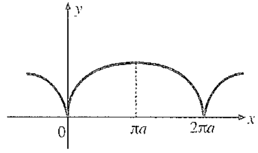
$$V=\pi\int_{t_1}^{t_2} v^2(t)\; u'(t)\,dt$$

biçiminde yazıp hesaplamaktan ibarettir.

ÖRNEK : Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

olan eğri (sikloid) ve Ox– ekseni tarafından sınırlanan bölgenin Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.



Çözüm :

$$V = \pi\int_0^{2\pi a} y^2\,dx = \pi\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,a(1-\cos t)\,dt$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\,dt$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,dt$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}\left[1-3\cos t+3\frac{1+\cos 2t}{2}-(1-\sin^2 t)\cos t\right]dt$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{2}-4\cos t+\frac{3}{2}\cos 2t+\sin^2 t\cos t\right)dt$$

$$\pi a^3\left[\frac{5}{2}t-4\sin t+\frac{3}{4}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin^3 t\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \pi a^3[5\pi] = 5\pi^2 a^3$$

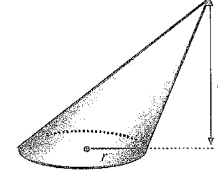
bulunur.

Eğer eğrilerin denklemleri parametrik olarak verilirse, sözkonusu bölgenin Oy– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşacak cismin hacmi,

$$\pi\int_c^d x^2\,dy$$

integralinin parametre cinsinden yazılıp hesaplanmasıyla bulunabilir.

1.



Taban yarıçapı r, yüksekliği h birim olan dairesel silindirlerin hacminin

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

birim küb olduğunu gösteriniz.

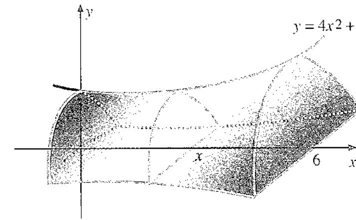
2. Tabanı bir ikizkenar dik üçgen olan bir piramidin yüksekliği h birimdir. Tabanının hipotenüsü $\sqrt{2}\,a$ birim olduğuna göre, piramidin hacmi kaç birim kübdür?

3. Yarıçapı r olan bir küre merkezinden a birim uzaktaki bir düzlemle kesiliyor. Kesilen küçük parçanın hacminin

$$V=\frac{\pi}{3}(r-a)^2(2r+a)$$

birimküb olacağını gösteriniz.

4.



Şekildeki cismin Ox– eksenine dik düzlemlerle arakesiti birer yarımdairedir. Cismin uzunluğu 6 birim olduğuna göre, hacmini bulunuz.

5. Bir cismin tabanı $x^2+y^2 \le a^2$ dairesidir. Bu cismin Ox– eksenine dik düzlemlerle arakesitleri birer kare olduğuna göre, bu cismin hacmini bulunuz.

6. Bir cismin tabanı, eksen uzunlukları 10 cm ve 8 cm olan bir elipstir. Bu cismin büyük eksene (asal eksene) dik düzlemlerle arakesiti, yüksekliği 6 cm olan eşkenar üçgenler olduğuna göre, cismin hacmini bulunuz.

7. Aşağıda denklemleri verilen eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgelerin Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cisimlerin hacimlerini bulunuz.

(a) $y=x^2$, $x=0$, $x=5$, $y=0$
(b) $y=1-x^2$, $y=0$
(c) $y=x^3$, $y=x$, $x=2$
(ç) $y=e^x$, $x=0$, $y=0$, $x=1$
(d) $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $y=0$
(e) $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $x=1$
(f) $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$

8. Aşağıda denklemleri verilen eğri ve doğrular arasında kalan bölgelerin Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cisimlerin hacmini bulunuz.

(a) $y=x$, $y=\sqrt{x}$
(b) $y=2x$, $y=x$, $x=1$
(c) $y=x^2+3$, $y=4$
(d) $y=x^2+1$, $y=x+3$
(e) $y=4-x^2$, $y=2-x$
(f) $y=\sec x$, $y=\tan x$, $x=0$, $x=1$
(g) $y=3x-x^2$, $y=x$
(h) $y^2=2px$, $x=h$
(ı) $(y-a)^2=ax$, $x=0$, $y=2a$
(i) $y=x^2+2$, $y=-x^2+10$

9. Aşağıdaki eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgelerin $Oy-$ ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

(a) $y = x^2$, $x = 0$, $y = 4$

(b) $x = y(3-y)$, $x = 0$, $y = 1$

(c) $y = x^3$, $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$

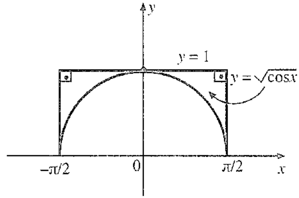
(d) $y = e^{-x}$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$

(e) $x = \sqrt{4-y}$, $x = 0$, $y = 0$

(f) $x = 1 - y^2$, $x = 0$

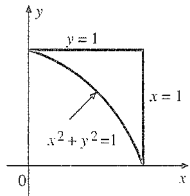
(g) $x = y^{3/2}$, $x = 0$, $y = 2$

10.



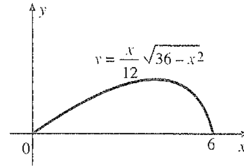
Yukarıdaki taralı bölgenin $Ox-$ ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

11.



Yukarıdaki taralı bölgenin $Oy-$ ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen cismin hacmini bulunuz.

12.



Yukarıdaki taralı bölgenin $Ox-$ ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

13. $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 0$

tarafından sınırlanan bölgenin

(a) $Ox-$ ekseni (b) $Oy-$ ekseni

(c) $y = 2$ doğrusu (d) $x = 4$ doğrusu

etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

14. $y = 2x$, $y = 0$, $x = 1$ doğruları tarafından sınırlanan bölgenin

(a) $x = 1$ doğrusu

(b) $x = 2$ doğrusu

etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

15. Aşağıdaki eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin karşılarında yazılı doğrular etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

(a) $y = x^2$, $y = 8 - x^2$ eksen $x = 4$

(b) $y = x + x^2$, $y = x^2 - 1$, $x = 0$ eksen $y = 1$

(c) $y = x^3$, $y = -1$, $x = 1$ eksen $y = 2$

(ç) $y = 4x - x^2$, $y = 0$ eksen $y = 4$

(d) $y = 1 - x^2$, $y = -3$ eksen $y = -3$

(e) $2x = 4 - y^2$, $2x = y^2 - 4$ eksen $x = -3$

(f) $x = y^2$, $x = 2 - y^2$ eksen $x = -1$

(g) $y = x^2$, $y = 8 - x^2$ eksen $y = -1$

16. $y = x^2 + 1$ eğrisi ile bu eğriye $x = 1$ apsisli noktasından çizilen teğet ve $x = 0$ doğrusu taraından sınırlanan bölgenin

(a) $Ox-$ ekseni

(b) $Oy-$ ekseni

etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmini bulunuz.

17. $y = \sin x$, $y = \cos x$ eğrileri,

$x = 0$ ve $x = \frac{\pi}{4}$ doğruları tarafından sınırlanan düzlemsel bölgenin $Ox-$ ekseni etrafında döndürülmesiyle elde edilen dönel cismin hacmini bulunuz.

18. Aşağıdaki eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgelerin $Oy-$ ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel cisimlerin hacimlerini kabuk yöntemiyle bulunuz.

(a) $y = x^2 - 2x$, $y = 0$

(b) $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$

(c) $y = 4x - x^2$, $y = 0$

(d) $xy = 5$, $y = -x + 6$

(e) $xy = 2$, $xy = 4$, $x = 1$, $x = 2$

(f) $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$

(g) $y = 3x^2 - x^3$, $y = 0$

(h) $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$

(ı) $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$, $x = 5$

19. Aşağıdaki eğri ve doğrular tarafından sınırlanan bölgelerin $Ox-$ ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cisimlerin hacimlerini kabuk yöntemiyle bulunuz.

(a) $x = y^2$, $x = 0$, $y = 1$

(b) $x = y^2 - 2y$, $x = 0$

(c) $y = \ln x$, $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$

(d) $y = 4 - 2x$, $y = 4 - x$, $y = 0$

20. $y = 3 - x^2$ parabolü, $y = 3x - 1$ doğrusu ve $Oy-$ ekseni tarafından sınırlanan bölge $Oy-$ ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin hacmini

(a) kesit (b) disk (c) kabuk

yöntemiyle hesaplayınız.

21. $y^2 = x(x-1)$ eğrisinin ilmeği tarafından sınırlanan bölge $Ox-$ ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin hacmini

(a) kesit (b) disk (c) kabuk

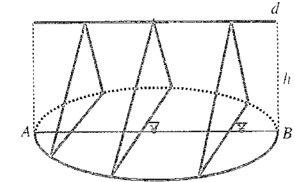
yöntemiyle hesaplayınız.

22. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsi tarafından sınırlanan bölge $Ox-$ ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen cismin (elipsoidin) hacmini bulunuz.

23. $x^2 + y^2 \le a^2$ dairesi $x = a$ doğrusu etrafında döndürülüyor. Oluşan cismin hacmini bulunuz.

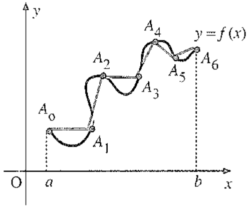
24. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroid eğrisi tarafından sınırlanan bölge $Ox-$ ekseni etrafında döndürülüyor. Oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.

25.



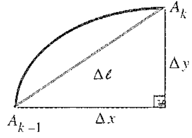
Bir üçgensel bölge yarıçapı a olan bir çemberin sabit AB çapına paralel olarak haraket etmektedir. Üçgenlerin tabanları sabit çapa dik olan kirişler, tepeleri de çember düzlemine h kadar uzakta bulunan ve sabit çapa paralel olan bir d doğrusu üzerindedir. Üçgenler çapın bir ucundan diğer ucuna kadar hareket ettirildiğinde oluşan cismin (taranan bölgenin) hacmini bulunuz.

7.5 EĞRİ UZUNLUĞU HESABI



$y = f(x)$ eşitliğiyle tanımlanan türevli f fonksiyonu verilmiş olsun. Bu eğrinin a ve b apsisli noktaları arasında kalan parçasının ℓ uzunluğunu bulalım.

$[a,b]$ aralığının bir parçalanması $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ olsun. $[A_{k-1}, A_k]$ doğru parçalarının uzunlukları toplamı, yaklaşık olarak, eğrinin ℓ uzunluğuna eşittir.



$$\Delta \ell_k = |A_{k-1}A_k| = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

olacağından

$$\ell \cong \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\, \Delta x_k$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\ell = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\, \Delta x_k$$

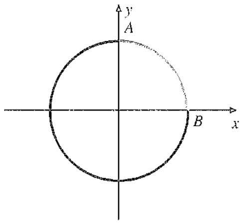
olur. $\|P\| \to 0$ için $\Delta x \to 0$ olacağından $\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \to y'$ olur. O halde

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

bulunur.

ÖRNEK : a yarıçaplı bir çemberin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm :



a yarıçaplı, $x^2 + y^2 = a^2$ çemberini gözönüne alalım.

Çemberin çevresi AB yayının 4 katına eşittir. Buna göre,

$$\ell = 4\int_0^a \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

olacaktır. $x^2 + y^2 = a^2$ olduğundan

$$2x + 2y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2 - x^2 + x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2}$$

dır. Buna göre

$$\ell = 4\int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}}\, dx = 4a\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$= 4a.\arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a = 4a.\frac{\pi}{2} = 2\pi a$$

birimdir.

ÖRNEK : $y = \ln x - \frac{1}{8}x^2$ eğrisinin $x = 2$ ve $x = 4$ apsisli noktaları arasındaki parçasının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm : $y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{4}x$ olacağından

$$1 + (y')^2 = 1 + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right)^2 = 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} + \frac{x^2}{16}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{16} = \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{4}\right)^2$$

bulunur. O hâlde

$$\ell = \int_2^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{4}\right) dx = \ln x + \frac{x^2}{8}\Big|_2^4 = \ln 4 + 2 - \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \ln 2$$

birimdir.

Eğer eğri parçasının denklemi

$$x = g(y) \ , \ c \le y \le d$$

biçiminde verilirse, eğri parçasının uzunluğu

$$\ell = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

olacaktır.

Uzunluğu bulunmak istenen eğrinin parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases} \ , \ t_1 \le t \le t_2$$

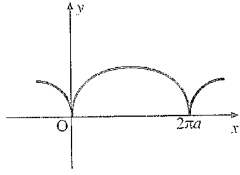
ise

$$\Delta \ell_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_k}{\Delta t_k}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta t_k}\right)^2}\, .\, \Delta t_k$$

yazılabileceğinden

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$$

bulunur.



ÖRNEK : Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a\,(t - \sin t) \\ y = a\,(1 - \cos t) \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

olan sikloidin bir yayının uzunluğunu bulunuz.

Çözüm :

$$x' = \frac{dx}{dt} = a\,(1 - \cos t)$$

$$y' = \frac{dy}{dt} = a \sin t$$

olduğundan

$$(x')^2 + (y')^2 = a^2\,(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)$$

$$= 2a^2\,(1 - \cos t) = 2a^2\,(1 - (1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}))$$

$$= 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2} = (2a \sin \frac{t}{2})^2$$

olur. Buna göre,

$$\ell = \int_0^{2\pi} 2a\,|\sin \frac{t}{2}|\,dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\,dt$$

$$= 4a\,(-\cos \frac{t}{2})\Big|_0^{2\pi} = 4a.2 = 8a$$

birim bulunur.

Yukarıda verilen yay uzunluğu formülleri gözönüne alındığında, yay diferensiyelinin, eğri denkleminin

$$y = f(x)$$

biçiminde olması halinde

$$d\ell = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$

eğri denkleminin,

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

biçiminde olması durumunda

$$d\ell = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt$$

olacağını gördük. Eğri denkleminin kutupsal formda olması halini ilerde Kutupsal Koordinatlar bölümünde vereceğiz.

1. Aşağıda denklemleri ve uç noktalarının apsisleri verilen eğri parçalarının uzunluklarını bulunuz.

(a) $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$, $x = 0$, $x = 2$

(b) $y = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^{3/2}$, $x = 0$, $x = 3$

(c) $y = 2\sqrt{x}$, $x = 0$, $x = 1$

(ç) $y = x^{3/2}$, $x = 0$, $x = 4$

(d) $9x^2 = 4y^3$, $x = 0$, $x = 2\sqrt{3}$

(e) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$, $x = 1$, $x_2 = 3$

(f) $y = \frac{1}{3}x^{2/3} - x^{1/2}$, $x = 1$, $x = 9$

(g) $y = (4 - x^{2/3})^{3/2}$, $x = 0$, $x = 8$

(h) $y = x^{5/2}$, $x = 0$, $x = 5$

(ı) $y = \frac{2}{3}(x^2 + 1)^{3/2}$, $x = 0$, $x = 2$

(i) $y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2x}$, $x = 1$, $x = 3$

(j) $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$, $x = 1$, $x = e$

(k) $y = \frac{2}{5}x^{5/4} - \frac{2}{3}x^{3/4}$, $x = 1$, $x = 16$

(l) $y = \ln(x^2 - 1)$, $x = 2$, $x = 5$

(m) $y = \ln(\sin x)$, $x = \frac{\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$

(n) $y = \ln x$, $x = \sqrt{3}$, $x = \sqrt{8}$

2. Aşağıda denklemleri ve uç noktalarının ordinatları verilen eğri parçalarının uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $x = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2y}$, $y = 1$, $y = 2$

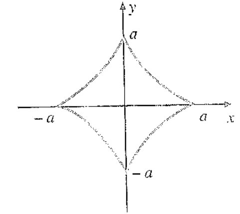
(b) $x = \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{8y^2}$, $y = 1$, $y = 2$

(c) $x = \ln(\sec y)$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{3}$

(d) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, $y = 1$, $y = e$

3. $9ay^2 = x(x - 3a)^2$ kapalı eğrisinin uzunluğunu bulunuz.

4. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ astroid eğrisinin çevre uzunluğunu bulunuz.



5. Parametre aralıkları karşılarında yazılı eğri parçasının uzunluklarını hesaplayınız.

(a) $x = 2t$, $y = t^3$, $-1 \le t \le 1$

(b) $x = \frac{1}{2}t^2 - 1$, $y = \frac{4}{3}t^{3/2}$, $0 \le t \le 2$

(c) $x = 2(1 - \cos t)$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$

(d) $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le 2\alpha$

(e) $x = \cos t$, $y = t + \sin t$, $-\pi \le t \le \pi$

(f) $x = 2a\cos t - a\cos 2t$
$y = 2a\sin t - a\sin 2t$, $0 \le t \le 2\pi$

6. $y = \int_{-\pi/2}^{x} \sqrt{\cos t}\,dt$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

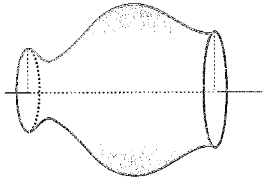
denklemli eğri parçasının uzunluğunu bulunuz.

7. Parametrik denklemi

$$x = \sqrt{3}\,t^2, \quad y = t - t^3$$

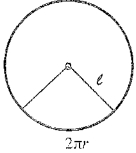
eğri ilmeğinin çevre uzunluğunu hesaplayınız.

7.6 DÖNEL YÜZEYLERİN ALANI



Dönel yüzey, bir eğri veya eğri parçasının, kendisiyle aynı düzlemde bulunan bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan bir yüzeydir. Küre, koni, silindir birer dönel yüzeydir.

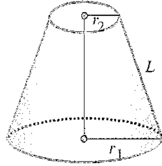
Dönel yüzeylerin alanlarını bulmanın genel yolu, verilen eğri parçasını, doğru parçalarının birleşimi gibi düşünmek, bu doğru parçalarının eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan kesik konilerin yüzey alanlarını bulup bunları toplamaktır. Bu alan gerçek alana çok yakındır.



Önce taban yarıçapı r, anadoğru uzunluğu ℓ olan bir koninin yanal yüzey alanını bulalım. Bu koni açılınca yarıçapı ℓ olan bir daire dilimi elde edilir. Bu dilimin alanı

$$A = \frac{2\pi r}{2\pi \ell} \cdot \pi \ell^2 = \pi r \ell$$

birimkaredir.

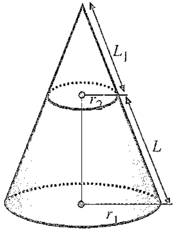


Şimdi taban yarıçapları r_1, r_2 ve anadoğru uzunluğu L olan kesik koninin yanal yüzey alanını bulalım.

Kesik koninin yanal yüzey alanı, r_1 yarıçaplı koninin yanal yüzey alanı ile r_2 yarıçaplı koninin yanal yüzey alanının farkına eşittir. O halde

$$S = \pi r_1 (L + L_1) - \pi r_2 L_1 = \pi L_1 (r_1 - r_2) + \pi r_1 L$$

olur. Diğer taraftan

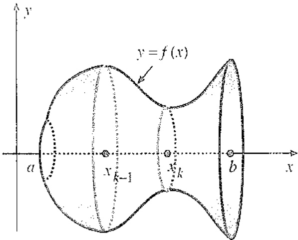


$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{L_1}{L_1 + L} \Rightarrow (r_1 - r_2)\, L_1 = L r_2$$

olacağından

$$S = \pi r_2 L_2 + \pi r_1 L = \pi L (r_1 + r_2) = 2\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) L$$

bulunur.



f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde türevli bir fonksiyon olsun. $y = f(x)$ eğrisinin Ox–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşacak olan yüzeyin alanını bulalım.

$P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, $[a,b]$ aralığının bir parçalanması olsun. $[x_{k-1}, x_k]$ aralığına karşılık gelen eğri parçasının döndürülmesiyle oluşan yüzey bir kesik koniye çok yakın bir yüzeydir. Bu nedenle bu yüzeyin alanı, yaklaşık olarak

$$\Delta S_k \cong \pi\, [f(x_{k-1}) + (f(x_k)]\,.\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + [f(x_k) - f(x_{k-1})]^2}$$

olur. Diferensiyel hesabın ortalama değer teoreminden, $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

olacak şekilde bir t_k noktası vardır.

Ayrıca Δx_k çok küçük seçildiğinde x_{k-1} ve x_k noktaları da t_k noktasına yaklaşır. f sürekli olduğundan $f(x_{k-1})$ ve $f(x_k)$ da $f(t_k)$ değerine yaklaşır. Dolayısıyla

$$\Delta S_k \cong 2\pi\, |f(t_k)|\, \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2}\ \Delta x_k$$

yazılabilir. Tüm yüzey alanı, bu alan parçalarının toplamının $\|P\| \to 0$ için limitine eşit olacağından

$$S = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi\, |f(t_k)|\, \sqrt{1 + [f'(t_k)]^2}\ \Delta x_k$$

olur. Sağdaki toplam bir Riemann toplamı olduğundan

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)|\, \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

bulunur. $y = f(x)$ olduğundan

$$S = 2\pi \int_a^b |y|\, \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

yazılabilir.

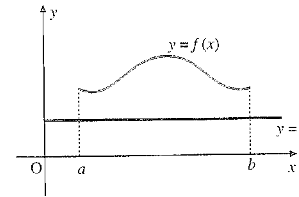
Benzer olarak, denklemi

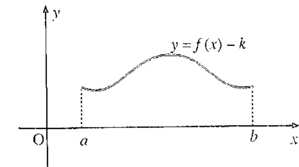
$$x = u(y), \quad c \le y \le d$$

olan eğri parçasının Oy– ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_c^d |x|\, \sqrt{1 + (x')^2}\, dy$$

olur.





$$y = f(x), \quad a \le x \le b$$

denklemli eğri parçasının $y = k$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanı ile, denklemi

$$y = f(x) - k, \qquad a \le x \le b$$

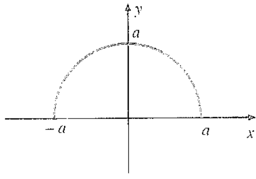
olan eğri parçasının $y = 0$ (Ox– ekseni) doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanı aynıdır. Diğer taraftan $(f(x) + k)' = f'(x)$ olacağından $y = f(x)$, denklemli eğri parçasının $y = k$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle meydana gelen dönel yüzeyin alanı

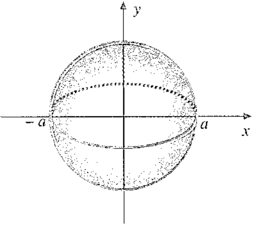
$$S = 2\pi \int_a^b |f(x) - k|\, \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

olur. Bu formül, kısaca

$$S = 2\pi \int_a^b |y - k|\, \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

şeklinde yazılabilir.





ÖRNEK : a yarıçaplı bir kürenin yüzey alanını bulunuz.

Çözüm : $y=\sqrt{a^2-x^2}$ yarı çemberinin Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle a yarıçaplı bir küre oluşur.

$$y'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

olacağından

$$1+(y')^2=1+\frac{x^2}{a^2-x^2}=\frac{a^2}{a^2-x^2}$$

dır. Buna göre, küre yüzeyinin alanı

$$S=2\pi\int_{-a}^{a}|y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,.\,\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$=2\pi a.\int_{-a}^{a}dx=4\pi a^2$$

birimkaredir.

y = x³

ÖRNEK : Denklemi

$$y=x^3\,,\quad 0\le x\le 1$$

olan eğri parçasının Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm : $f'(x)=3x^2$ olduğundan

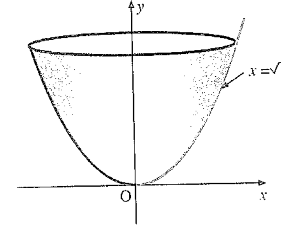
$$S=2\pi\int_0^1 y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx$$

$$=2\pi.\frac{1}{36}\int_0^1\left(1+9x^4\right)^{1/2}.36x^3\,dx$$

$$=\frac{\pi}{18}\cdot\frac{2}{3}\left(1+9x^4\right)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{27}(10^{3/2}-1)$$

br^2 olur.



ÖRNEK : Denklemi

$$x=\sqrt{y}\,,\quad 0\le y\le 2$$

olan eğri parçasının Oy– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını hesaplayınız.

Çözüm : $x'=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$ olduğundan

$$1+(x')^2=1+\frac{1}{4y}=\frac{4y+1}{4y}$$

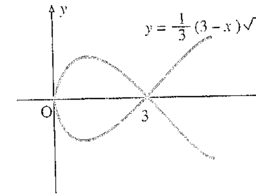
olur. Dolayısıyla

$$S=2\pi\int_0^2 x\sqrt{1+(x')^2}\,dy=2\pi\int_0^2\sqrt{y}\,.\,\frac{\sqrt{1+4y}}{2\sqrt{y}}\,dy$$

$$=\pi\int_0^2(1+4y)^{1/2}\,dy=\frac{\pi}{4}\int_0^2(1+4y)^{1/2}\,4dy$$

$$=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+4y)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=\frac{\pi}{6}(27-1)=\frac{13}{3}\pi$$

birimkare olur.



ÖRNEK : $9y^2=x\,(3-x)^2$ eğrisinin ilmeği Ox– ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm : İlmeğin üst parçasının denklemi

$$y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\,,\quad 0\le x\le 3$$

dür. Ayrıca

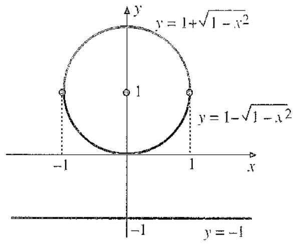
$$1+(y')^2=1+\left[\frac{1}{3}(-\sqrt{x})+\frac{3-x}{2\sqrt{x}}\right]^2=\left[\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\right]^2$$

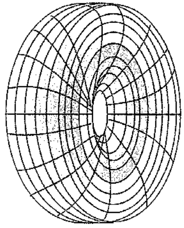
olacağından

$$S=2\pi\int_0^3\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}\,\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx=\frac{\pi}{3}\int_0^3(3+2x-x^2)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{3}\left(3x+x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3=3\pi$$

birimkare olur.





ÖRNEK : $x^2 + (y-1)^2 = 1$ çemberinin $y = -1$ doğrusu etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm : Çemberin üst ve alt yarılarının denklemleri sırasıyla

$$y = 1 + \sqrt{1-x^2} \quad ve \quad y = 1 - \sqrt{1-x^2}$$

dir. Sözkonusu olan bu çember parçalarının $y = -1$ doğrusu etrafında dönmesiyle meydana gelen dönel yüzeylerin alanları toplamıdır.

Buna göre

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} \left|1 + \sqrt{1-x^2} + 1\right| \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\, dx + 2\pi \int_{-1}^{1} \left|1 - \sqrt{1-x^2} + 1\right| \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} (2 + \sqrt{1-x^2} + 2 - \sqrt{1-x^2}) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 8\pi\, arc \sin x \Big|_{-1}^{1} = 8\pi.\pi = 8\pi^2$$

br^2 olur.

Eğri denkleminin $y = f(x)$ biçiminde verilmesi halinde, yay diferensiyeli

$$d\ell = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

eğrinin $x = g(y)$ biçiminde verilmesi halinde

$$d\ell = \sqrt{1 + (x')^2}\, dy$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$y = f(x)\,, \qquad a \le x \le b$$

eğri parçasının Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_a^b |y|\, d\ell$$

$x = g(y)$, $c \le y \le d$ denklemli eğri parçasının Oy– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_c^d |x|\, d\ell$$

biçiminde yazılabilir.

Eğri parçasının denklemi

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2$$

biçiminde verilirse, bu eğrinin Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanı,

$$d\ell = \sqrt{(x)^2 + (y')^2}\, dt$$

olduğundan,

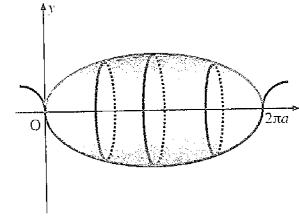
$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |y| \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$$

olur. Buradaki türevler x ve y nin t ye göre türevleridir.

Söz konusu eğrinin Oy– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |x| \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$$

olacaktır.



ÖRNEK :

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

sikloid parçasının Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm :

$$(x')^2 + (y')^2 = a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = 2a^2(1 - \cos t)$$

$$= 2a^2(1 - 1 + 2\sin^2 \frac{t}{2}) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

olduğundan

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}}\, dt$$

$$= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2}\, dt$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 u\, du$$

$$= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 u) \sin u\, du$$

$$= 16\pi a^2 (-\cos u + \frac{1}{3}\cos^3 u)\Big|_0^{\pi} = \frac{64}{3}\pi a^3$$

br^2 olur.

1. Aşağıda denklemleri verilen eğri parçalarının Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını hesaplayınız.

(a) $y=\sqrt{x}$, $\quad 2 \le x \le 6$

(b) $y=x^2$, $\quad 0 \le x \le 4$

(c) $y=\dfrac{2}{3}x^{3/2}$, $\quad 0 \le x \le 2$

(ç) $y=(2x-x^2)^{1/2}$, $\quad 0 \le x \le 2$

(d) $y=\dfrac{1}{5}x^5+\dfrac{1}{12x^3}$, $\quad 1 \le x \le 2$

(e) $y=\dfrac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$, $\quad 0 \le x \le \sqrt{2}$

(f) $y=\dfrac{x^3}{9}$, $\quad 0 \le x \le 2$

(g) $y=\tan x$, $\quad -\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{4}$

(h) $y=\sqrt{2x-x^2}$, $\quad 0 \le x \le 2$

(ı) $y=\dfrac{2}{3}x^{3/2}-\dfrac{1}{2}x^{1/2}$, $\quad 1 \le x \le 2$

(i) $y=x\sqrt{\dfrac{x}{a}}$, $\quad 0 \le x \le a$

2. Aşağıda denklemleri verilen eğri parçalarının Oy– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını hesaplayınız.

(a) $y=x^3$, $\quad 0 \le y \le 1$

(b) $x=\dfrac{1}{3}y^3$, $\quad 0 \le y \le 1$

(c) $x=2\sqrt{4-y}$, $\quad 0 \le y \le \dfrac{15}{4}$

(d) $x=\dfrac{1}{3}y^{3/2}-y^{1/2}$, $\quad 0 \le y \le 3$

(e) $xy=1$, $\quad 1 \le y \le 2$

(f) $x=\sqrt{2y-1}$, $\quad \dfrac{1}{2} \le y \le 1$

3. Aşağıda parametrik denklemleri verilen eğri parçalarının Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeylerin alanlarını bulunuz.

(a) $x=1-t$, $\quad y=2t^{1/2}$, $\quad 1 \le t \le 2$

(b) $x=\dfrac{1}{2}t^2$, $\quad y=t$, $\quad \sqrt{3} \le t \le 2\sqrt{2}$

(c) $x=\dfrac{2}{3}(1-t)^{3/2}$, $\quad y=\dfrac{2}{3}(1+t)^{3/2}$, $\quad -\dfrac{3}{4} \le t \le 0$

(d) $x=\dfrac{1}{3}t^3$, $\quad y=2t^{3/2}$, $\quad 1 \le t \le 3$

(e) $x=\sin^2 t$, $\quad y=\sin t\cos t$, $\quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

(f) $x=t+\sin t$, $\quad y=\cos t$, $\quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}$

(g) $x=e^t\sin t$, $\quad y=e^t\cos t$, $\quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$

4. Aşağıda parametrik denklemleri verilen eğri parçalarının Oy– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeylerin alanlarını bulunuz.

(a) $x=t^3$, $\quad y=2t+3$, $\quad -1 \le t \le 1$

(b) $x=2t+1$, $\quad y=t^2+t$, $\quad 0 \le t \le 3$

(c) $x=\dfrac{1}{t}$, $\quad y=\ln t$, $\quad \dfrac{1}{2} \le t \le 1$

(d) $x=\sin^2 t$, $\quad y=\cos^2 t$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$

(e) $x=2e^{-t}$, $\quad y=e^{-2t}$, $\quad 0 \le t \le 1$

5. Denklemi $x^{1/2}+y^{1/2}=3$ olan eğrinin (4,1) ve (1,4) noktalarını birleştiren parçasının Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

6. $x^2+(y-1)^2=1$ çemberinin Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

7. $8y^2=x^2-x^4$ denklemli kapalı eğrinin Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

8. $x=a\,(2\cos t-\cos 2t)$

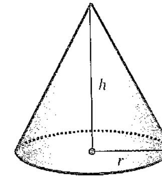
$y=a\,(2\sin t-\sin 2t)$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$

eğri parçasının Ox– ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını hesaplayınız.

9. $y=\displaystyle\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,dt$, $\quad 1 \le x \le \sqrt{5}$

denklemli eğri parçasının x– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

10.



Yukarıda taban yarıçapı r birim, yüksekliği h birim olan dairesel koni verilmiştir. Bu koninin yanal yüz alanının

$$S=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$$

birimkare olduğunu gösteriniz.

11. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ astroid eğrisinin üst yarısının Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanının

$$S=\frac{12}{5}\pi a^2$$

olacağını gösteriniz.

12. $[a,b]\subset[-1,1]$ olsun.

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}, \quad a \le x \le b$$

denklemli eğri parçasının Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzey alanının

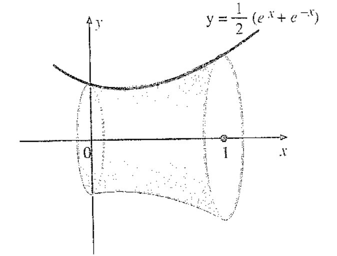
$$S=2\pi\,(b-a)$$

olacağını gösteriniz. Bulunan sonuç $[a,b]$ aralığının $[-1,1]$ içindeki konumuna bağlı mıdır?

13. r_1 ve r_2 pozitif sayılar olsun.

$(r_1,0)$ ve $(r_2,\ h)$ noktalarını birleştiren doğru parçasının Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan kesik koninin yanal alanını bulunuz.

14.

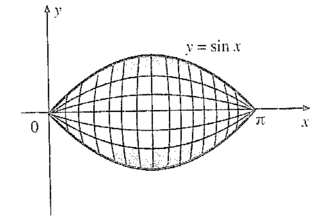


Denklemi

$$y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}), \quad 0 \le x \le 1$$

olan eğri parçasının Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

15.

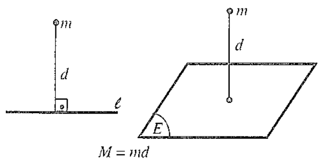


Denklemi

$$y=\sin x, \quad 0 \le x \le \pi$$

olan eğri parçasının Ox– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını hesaplayınız.

7.7 MOMENT VE AĞIRLIK MERKEZİ



$M = md$

Kütlesi m olan bir parçacığın bir noktaya bir eksene veya bir düzleme göre momenti denilince, parçacığın sözkonusu nokta, eksen veya düzleme olan uzaklığı d olmak üzere,

$$M = m.d$$

sayısı anlaşılır. Eğer cisim bir parçacık değil de, kütleleri $m_1, m_2, \ldots m_n$ olan bir sistem ise, bu sistemin nokta, eksen veya düzleme olan uzaklıkları $d_1, d_2, \ldots, d_n$ olduğunda sistemin momenti

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k d_k$$

olur. Eğer cisim bir eğri parçası, bir düzlem parçası (levha) veya bir katı cisim gibi sürekli bir cisim ise yukarıdaki toplam bir sonlu toplam olmaktan çıkar. Böyle bir toplamda önce kütle kavramına bir anlam kazandırmak gerekir. İşe yoğunluk fonksiyonunu tanımlayarak başlayalım.

Bir eğri parçasının kütlesinin yay uzunluğuna göre değişme oranına, yani $\frac{dm}{d\ell} = \sigma$ oranına kütlenin yoğunluk fonksiyonu adı verilir. Bu durumda

$$dm = \sigma\, d\ell$$

olur. Benzer şekilde, momenti istenen parçacık bir levha parçası ise, dA alan diferensiyeli olmak üzere

$$dm = \sigma\, dA$$

dır. Parçacık bir katı cisim ise, dV hacim diferensiyeli olmak üzere,

$$dm = \sigma\, dV$$

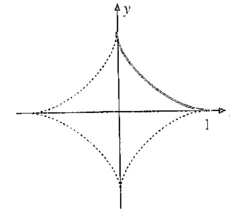
olur. Buna göre bir eğri parçası, bir düzlem parçası veya bir katı cisim olması durumunda cismin kütlesi, sırasıyla,

$$m = \int \sigma\, dl,$$

$$m = \int \sigma\, dA,$$

$$m = \int \sigma\, dV$$

olacaktır. Bu kavramlar genelde, çok katlı integrallere ihtiyaç gösterirler. Fakat bir kısmı belirli integralle de hesaplanabilir.



ÖRNEK : $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ astroid eğrisinin birinci bölgedeki parçası üzerine yerleştirilmiş bir telin her noktadaki yoğunluğu o noktanın apsisinin karesine eşittir. Bu telin kütlesini bulunuz.

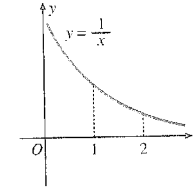
Çözüm : $\sigma(x) = x^2$ olduğundan

$$m = \int_0^1 \sigma(x)d\ell = \int_0^1 x^2\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2\sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx = \int_0^1 x^2\sqrt{\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2\frac{1}{x^{1/3}}\,dx = \int_0^1 x^{5/3}\,dx = \frac{3}{8}$$

olur. Burada birim, kütle birimidir.



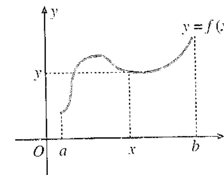
ÖRNEK : $y = \frac{1}{x}$ eğrisi, $x = 1$, $x = 2$ doğruları ve $0x$– ekseniyle sınırlanan bölgeye yerleştirilen bir levhanın her noktadaki yoğunluğu, o noktanın apsisinin 2 katıdır. Bu levhanın kütlesini bulunuz.

Çözüm : $\delta(x) = 2x$, $dA = ydx = \frac{1}{x}dx$ olacağından

$$m = \int_1^2 \sigma(x)\,dA = \int_1^2 \sigma(x)ydx = \int_1^2 2x\frac{1}{x}dx$$

$$= \int_1^2 2dx = 2x\Big|_1^2 = 2$$

bulunur.



M momenti kütle ile uzaklığın çarpımı olduğundan, momenti istenen cisim

$$y = f(x), \quad a \le x \le b$$

denklemli bir eğri parçası ise bunun $0x$– eksenine göre momenti,

$$M_x = \int_a^b ydm = \int_a^b y\,\sigma(x)d\ell = \int_a^b y\sigma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx,$$

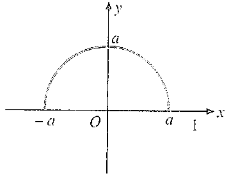
$0y$– eksenine göre momenti

$$M_y = \int_a^b xdm = \int_a^b x\,\sigma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx,$$

$O(0,0)$ noktasına göre momenti de

$$M_0 = \int_a^b \sqrt{x^2+y^2}\,\sigma(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

olacaktır.



ÖRNEK : $y=\sqrt{a^2-x^2}$ yarı çemberi biçimindeki bir homogen telin Ox– eksenine göre momentini hesaplayınız.

Çözüm : Cisim homogen ise yoğunluğu sabittir. $\sigma(x)=k$ olsun.

$$1+(y')^2=1+\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2=\frac{a^2}{a^2-x^2}$$

olacağından

$$M_x=\int_{-a}^{a} y\sigma\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,k\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$=ka\int_{-a}^{a}dx=2ka^2$$

bulunur.

Öyle bir $(\bar{x},\bar{y})$ noktası bulalım ki

$$\bar{x}\,.\,m=M_y,\qquad \bar{y}\,.\,m=M_x$$

olsun. Bu durumda tüm kitlenin $(\bar{x},\ \bar{y})$ noktasında toplandığı düşünülebilir. Bu $(\bar{x},\ \bar{y})$ noktasına cismin kütle (ağırlık) merkezi denir. Şu halde ağırlık merkezinin koordinatları

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m}=\frac{1}{m}\int x\,dm$$

$$\bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{1}{m}\int y\,dm$$

olacaktır. Ağırlık merkezi hesaplanan cismin şekline göre dm hesaplanıp integralde yerine konur.

ÖRNEK : $y=\sqrt{4-x^2}$ yarıçemberi biçimindeki bir telin yoğunluğu, her noktada o noktanın ordinatının 2 katıdır. Bu telin ağırlık merkezini bulunuz.

Çözüm : Verilen yarım çemberin parametrik denklemi

$$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases},\qquad 0\le t\le \pi$$

olur.

$$dm=\sigma d\ell=2y\sqrt{(x')^2+(y')^2}=4\sin t\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}\,dt$$

$$=8\sin t\,dt$$

olacağından

$$m=\int dm=\int_0^{\pi}8\sin t\,dt=8(-\cos t)\Big|_0^{\pi}=16$$

bulunur.

$$M_x=\int_0^{\pi}y\,dm=\int_0^{\pi}2\sin t.8\sin t\,dt=16\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt$$

$$=8\int_0^{\pi}(1-\cos 2t)dt=8\left(t-\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi}=8\pi$$

olduğundan

$$\bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{8\pi}{16}=\frac{\pi}{2}$$

dir.

$$M_y=\int x\,dm=\int_0^{\pi}2\cos t.8\sin t\,dt=16\int_0^{\pi}\sin t\cos t\,dt$$

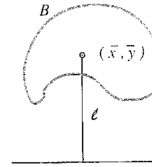
$$=16\frac{1}{2}\sin^2 t\Big|_0^{\pi}=0$$

olduğundan

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m}=0$$

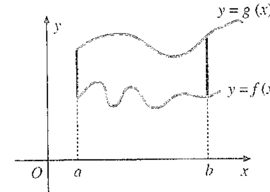
bulunur. Şu halde telin ağırlık merkezi $A\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ noktasıdır.

Bir eğrinin veya bölgenin ağırlık merkezinin bilinmesi, dönel yüzeylerin alan ve hacimlerinin hesaplanmasını kolaylaştırır. Şimdi *M.Ö.* 300 yıllarında Pappus tarafından verilen fakat Matematik dünyasına Guldin tarafından kazandırılan iki teorem verelim.



TEOREM 7.1 (Birinci Pappus – Guldin Teoremi) **:**

Bir düzlemsel bölgenin kendisiyle kesişmeyen bir eksen etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi, bu bölgenin alanı ile bölgenin ağırlık merkezinin sözü geçen dönme sırasında aldığı yolun çarpımına eşittir.



İspat : B bölgesinin alanı A, ağırlık merkezi $(\bar{x},\ \bar{y})$ olsun. B bir düşey sabit bölge olup $B=\{(x,y): a\le x\le b\ ,\ f(x)\le y\le g(x)\}$ biçiminde tanımlanmış olsun. Burada f ve g negatif olmayan sürekli fonksiyonlardır. Genellikten bir şey kaybetmeksizin dönme ekseni olarak Ox– eksenini alalım. Yoğunluk fonksiyonunu 1 olarak seçelim. B bölgesinin Ox– ekseni etrafında dönmesiyle oluşan cismin hacmi

$$V=\pi\int_a^b\left[g^2(x)-f^2(x)\right]dx$$

olur. B bölgesinin ağırlık merkezinin ordinatı

$$\bar{y}=\frac{M_x}{m}=\frac{1}{\sigma A}\int_a^b\sigma y\,dA=\frac{1}{A}\int_a^b y\,(g(x)-f(x))\,dx$$

olur.

$$y = \frac{g(x) + f(x)}{2}$$

alınabileceğinden

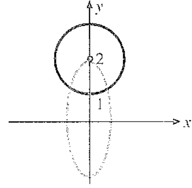
$$\bar{y} = \frac{1}{2A}\int_a^b \left[g^2(x) - f^2(x)\right]dx = \frac{1}{2A}\cdot\frac{V}{\pi}$$

yazılabilir. Buradan

$$V = (2\pi\,\bar{y})A$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

ÖRNEK : $x^2 + (y-2)^2 \le 1$ dairesinin $0x$– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulunuz.



Çözüm : Bölgenin ağırlık merkezi (0,2) noktasıdır. Bu nokta $0x$– ekseni etrafında 360° döndürüldüğünde 2 birim yarıçaplı bir çember oluşur. Bu çemberin çevresi $2\pi r = 2\pi . 2 = 4\pi$ birimdir. Döndürülen dairenin alanı $\pi r^2 = \pi$ olacağından

$$V = 4\pi \,.\, \pi = 4\pi^2$$

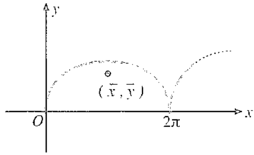
birimküp olur.

> **TEOREM 7.2** (İkinci Pappus – Guldin Teoremi) :
>
> Bir düzlemsel eğrinin kendisiyle kesişmeyen bir eksen etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı, bu eğrinin uzunluğu ile eğrinin ağırlık merkezinin dönme sırasında aldığı yolun çarpımına eşittir.

Bu teoremin ispatı birinci teoremin ispatına benzer olduğundan ispatı okuyucuya bırakıyoruz.

ÖRNEK : Parametrik denklemi

$$\begin{matrix} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{matrix}\ ,\quad 0 \le t \le 2\pi$$



olan sikloid yayının $0x$– ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} d\ell &= \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,dt = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt \\ &= \sqrt{2(1-\cos t)}\,dt = \sqrt{2\left[1 - \left(1 - \sin^2\frac{t}{2}\right)\right]}\,dt \\ &= 2\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt \end{aligned}$$

olduğundan

$$\ell = \int_0^{2\pi} d\ell = \int_0^{2\pi} 2\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt = 2\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = 8$$

birim olur.

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{m}\int y\,dm = \frac{1}{\sigma A}\int y\,\sigma d\ell = \frac{1}{\ell}\int y\,d\ell \\ &= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)2\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt \\ &= \int_{-1}^{0}(1-u^2)\,du = u - \frac{u^3}{3}\Big|_{-1}^{0} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

bulunur.

$0x$– ekseninden $\frac{2}{3}$ birim uzakta bulunan bir nokta $0x$– ekseni etrafında döndürüldüğünde oluşan çemberin çevresi

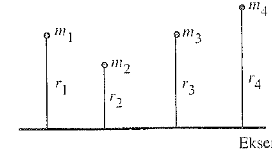
$$Ç = 2\pi r = 2\pi \,.\, \frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

birim olacağından, dönel yüzeyin alanı

$$S = \frac{4\pi}{3}.8 = \frac{32}{3}\pi$$

br^2 olur.

Kütleleri, $m_1, m_2, \ldots, m_n$ olan $B_1, B_2, \ldots, B_n$ noktalarından oluşan bir sistemi düşünelim. Bu noktaların bir eksene olan uzaklıkları sırasıyla $r_1, r_2, \ldots, r_n$ olsun



$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2$$

ifadesine sistemin $0x$– eksenine göre eylemsizlik (atalet) momenti denir.

Eğer sistem bir eğri parçası, bir düzlem parçası veya bir katı cisim ise yukarıdaki toplam bir sonlu toplam olmaktan çıkar. Sistem küçük parçalara ayrılıp herbirinin eylemsizlik momenti hesaplanıp $\|P\| \to 0$ için limit alınırsa bu bizi integrale götürür. Bu durumda

$$I = \int r^2\,dm$$

olur.

Eğer eylemsizlik momenti hesaplanacak olan cisim

$$y = f(x),\quad a \le x \le b$$

denklemli bir eğri parçası, eksen $0x$– ekseni ise

$$dm = \sigma d\ell = \sigma\sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$

olacağından, eğrinin $0x$– eksenine göre eylemsizlik momenti

$$I_x = \int_a^b \sigma y^2 \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

olur. Eğer eğri denklemi

$$x = u(t)\ , \quad y = v(t)\ , \quad \alpha \le t \le \beta$$

biçiminde, parametrik olarak verilirse

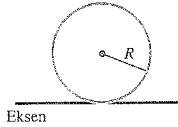
$$I_x = \int_\alpha^\beta \sigma\, v^2(t)\sqrt{[u'(t)]^2 + [v'(t)]^2}\, dt$$

bulunur.

Benzer şekilde, eğrinin $0y$– eksenine göre eylemsizlik momenti

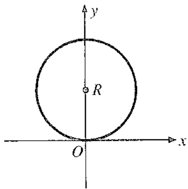
$$I_y = \int_\alpha^\beta \sigma\, u^2(t)\sqrt{[u'(t)]^2 + [v'(t)]^2}\, dt$$

olacaktır.



ÖRNEK : R yarıçaplı çember şeklindeki bir homogen halkanın tüm kütlesi m olduğuna göre, bu halkanın kendi düzleminde bulunan ve çembere teğet olan bir eksene göre eylemsizlik momentini bulunuz.

Çözüm : Çemberin merkezi $(0, R)$, eksen de $0x$– ekseni olsun. Çemberin bir parametrik denklemi



$$x = R\cos t,\quad y = R + R\sin t,\quad 0 \le t \le 2\pi$$

olacağından

$$\mathrm{I_x} = \int_0^{2\pi} \sigma y^2 \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt = \sigma \int_0^{2\pi} R^2(1+\sin t)^2 \sqrt{R^2\sin^2 + R^2\sin^2 t}\, dt$$

$$= \sigma R^3 \int_0^{2\pi} (1 + 2\sin t + \sin^2 t)\, dt$$

$$= \sigma R^3 \int_0^{2\pi} (1 + 2\sin t + \frac{1-\cos 2t}{2})\, dt$$

$$= 3R^3\sigma\pi = \frac{3}{2}(2\pi R\sigma)R^2 = \frac{3}{2} mR^2$$

olur, zira m = $2\pi R\,\sigma$ dir.

Bu kesimde bazı özel tipteki limitlerin integraller yardımıyla nasıl hesaplanacağını göreceğiz.

TEOREM 7.3 : Eğer $f: [a,b] \to R$ sürekli bir fonksiyon ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x)\, dx$$

dir.

İspat : $[a,b]$ aralığını n eşit parçaya bölelim. Her bir alt aralığın uzunluğu $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ dir. $\xi_k = a + k\frac{b-a}{n}$ alınırsa

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

olur. Sol taraf f nin $[a,b]$ aralığındaki integrali olduğundan, teoremdeki eşitlik doğrudur. Özel olarak $a = 0$, $b = 1$ alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\, dx$$

bağıntısı bulunur.

ÖRNEK : $\lambda \ne -1$ olmak üzere, $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2^\lambda + 3^\lambda + \cdots + n^\lambda}{n^{\lambda+1}} = \frac{1}{\lambda+1}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2^\lambda + 3^\lambda + \cdots n^\lambda}{n^{\lambda+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^\lambda + \left(\frac{2}{n}\right)^\lambda + \cdots \left(\frac{n}{n}\right)^\lambda\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^\lambda = \int_0^1 x^\lambda\, dx = \frac{x^{\lambda+1}}{\lambda+1}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{\lambda+1}$$

olur.

ÖRNEK : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{n-1}{n}} + e^{\frac{n}{n}}\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \cdots e^{\frac{n-1}{n}} + e^{\frac{n}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{k}{n}} = \int_0^1 e^x\, dx = e^x\Big|_0^1 = e - 1$$

bulunur.

1. Parametrik denklemi

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \sin t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

olan eğri biçiminde kıvrılmış bir telin yoğunluk fonksiyonu $\sigma(t) = \cos\frac{t}{2}$ olduğuna göre, kütlesi ne olur?

2. $y = x^3$, $y = -x$ ve $x = 2$ tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen bir levhanın her noktadaki yoğunluğu o noktanın apsisine eşittir. Bu levhanın kütlesini bulunuz.

3. (x,y) noktasındaki yoğunluğu y olan bir tel, parametrik denklemi

$$x = 2\cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

olan eğri parçası biçiminde kıvrılıyor. Bu telin kütlesini bulunuz.

4. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ doğruları tarafından sınırlanan üçgenin $0x$ ve $0y$– eksenlerine göre momentini bulunuz.

5. Kenar uzunlukları a ve b olan dikdörtgen şeklindeki bir levhanın kenarlarına göre momentlerini bulunuz.

6. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ yarım çemberinin ağırlık merkezini bulunuz.

7. $y = 2\sqrt{x}$, $1 \le x \le 4$ parabol parçasının ağırlık merkezini bulunuz.

8. $y = \sin x$ eğrisinin $[0,\pi]$ aralığındaki parçası ile $0x$– ekseni arasında kalan levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

9. $y = \cosh x$ eğrisinin apsisleri –1 ve 1 olan noktalar arasındaki yayının ağırlık merkezini bulunuz.

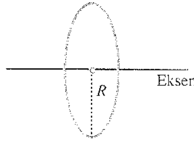
10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ elipsinin birinci bölgedeki parçasının ağırlık merkezini bulunuz.

11. $y = x^2$ ve $y = \sqrt{x}$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgeye yerleştirilen homogen levhanın ağırlık merkezinin koordinatlarını bulunuz.

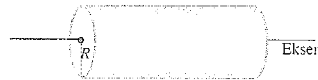
12. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ eğrisiyle koordinat eksenleri arasında kalan bölgeye yerleştirilen bir levhanın ağırlık merkezini bulunuz.

13. Kenar uzunlukları a ve b olan bir dikdörtgenin kendi kenarlarına göre eylemsizlik momentini bulunuz.

14. Kütlesi m, yarıçapı R olan bir halkanın merkezinden geçen ve çember düzlemine dik olan bir eksene göre eylemsizlik momentini bulunuz.



15.



Yarıçapı R, uzunluğu ℓ ve kütlesi m olan bir dairesel silindirin eksenine göre eylemsizlik momentini hesaplayınız.

16. $y = x^2$ ve $x = y^2$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin $0x$– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini Pappus – Guldin Teoremi yardımıyla hesaplayınız.

17. Yarım dairenin ağırlık merkezini Pappus – Guldin Teoremi yardımıyla hesaplayınız.

18. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{n\pi}{n}\right)$

1. $y = 2^{-x} - \frac{1}{4}$ eğrisiyle koodinat eksenleri arasında kalan kapalı bölgenin alanını hesaplayınız.

2. $y = -\frac{10}{1+x^2}$, $y = 2 - x^2$ eğrileri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

3. Birinci bölgede $y = x + 1$ doğrusu, $y = \cos x$ eğrisi ve $0x$– ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

4. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ ve $x + y = 1$ tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

5. $y^2 = x^2(1 - x^2)$ eğrisi tarafından sınırlanan kapalı bölgenin alanını bulunuz.

6. $x = y^2(1 - y)$ eğrisiyle koordinat eksenleri tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

7. $y = (1 - x^2)^{-\frac{1}{4}}$ eğrisi, $x = 0$ ve $x = \frac{1}{2}$ doğruları ile $0x$– ekseni etrafında sınırlanan bölge $0x$– ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini hesaplayınız.

8. Birinci bölgede $y = \sin x$ eğrisi, $y = 1$ doğrusu ve $0y$– ekseni erasında kalan bölge $0y$– ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

9. $y^2 = \frac{ax^3 - x^4}{a^2}$ eğrisi tarafından sınırlanan kapalı bölgenin $0x$– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini hesaplayınız.

10. $y^2 = \frac{3}{2}x$, $x^2 + y^2 = 1$ eğrileri tarafından sınırlanan kapalı bölge $0x$– ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

11. $y = \frac{\ln x}{x^2}$ eğrisi, $x = 1$ ve $x = e$ doğruları ile $0x$– ekseni tarafından sınırlanan bölgenin $0y$– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini bulunuz.

12. **"Aynı yüksekliğe sahip iki cismin bir doğruya dik olan düzlemlerle elde edilen kesitleri eşit alana sahip iseler bu iki cisim eşit hacimlidir."** şeklinde ifade edilen ikinci Cavalieri Prensibini ispat ediniz.

13. $x^2 + y^2 = R^2$ çemberinin birinci bölgedeki parçasının $0y$– eksenine göre eylemsizlik momentini bulunuz. (Çemberin homogen olduğu varsayılıyor)

14. a ve b pozitif sayılar olsun. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ doğrusu ile koordinat eksenleri arasında kalan bölgeye yerleştirilen homogen bir levhanın $0x$ ve $0y$– eksenlerine göre eylemsizlik momentlerini bulunuz.

15. Yarıçapı R, merkez açısı 2α olan bir çember yayının ağırlık merkezini bulunuz.

16. $y = \ln\frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ eğrisinin $x = 0$ ve $x = \ln 2$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

17. $y = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 - 1} - \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right]$ eğrisinin $x = 1$ ve $x = 3$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu bulunuz.

18. $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t$
$y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \qquad 0 \le t \le \pi$
denklemli eğri parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

19. $y = \frac{x^3}{3a^2} + \frac{a^2}{4x}$ eğrisinin $x = a$ ve $x = 2a$ apsisli noktaları arasında kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız. Bu parçanın $0y$– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.



LEONARD EULER (1707 – 1783)

Leonard Euler 15 Mayıs 1707 günü İsviçre'nin Bale kentinde doğdu. Bir papaz olan babası Paul Euler de bir matematikçidir. Babasının gayesi onu rahip yapmaktı. Fakat bir yandan da ona matematik öğretiyordu.

Euler babasının arzusuna uyarak Bale Üniversitesine girdi; teoloji ve İbranice öğrendi. Bir süre sonra Matematikte Jean Bernoulli'nin dikkatini çekti.

Leonard Euler 1724 de öğretmenlik diploması aldı. Babası artık kendisini tamamiyle teolojiye vermesini istiyordu. Fakat Bernoulli'ler onun papaz değil büyük bir matematikçi olacağını söyleyince bu ısrarından vazgeçti.

Euler ilk eserini 17 yaşında verdi. Paris İlimler Akademisinin 1727 yılında düzenlediği yarışmaya girdi. Tezi ödül alamadı ama dereceye girdi. Euler daha sonraları bu yarışmaya defalarca girmiş 12 kez ödül almıştır.

Eulerin Matematik hayatı Newton'un öldüğü yıl başladı. 1637 de ortaya çıkan analitik geometri 90 yıl, diferansiyel ve integral hesap 50 yıl, Newton yasaları 40 yıl uygulanmış, matematikte çok ileri adımlar atılmıştı. Fakat Descartes, Newton ve Leibniz uygulamalı matematiği sistemli olarak incelememiş, analitik yöntemleri geometri ve mekanikte uygun oldukları noktaya kadar ilerletememişlerdir. Diğer taraftan cebir ve geometri epey gelişmiş durumdaydı.

Fermat'ın çalışmalarını gözden geçiren Euler bu sahada oldukça ileri çalışmalar gerçekleştirdi.

Euler'in ilginç bir yanı da algorist oluşuydu. Algorist, aklını ustalıkla kullanarak bir yöntem veya bir oyunla problemleri çözen kimselere verilen addır.

Euler sadece çok zeki değil aynı zamanda çok da çalışkan biriydi.

Akıl almaz bir hafızası vardı. Tüm hesapları sanki beynine yazardı. Uzun ve zor hesapları kafasından yapar ve uzun süre hafızasında tutabilirdi. Ölünceye kadar zekası aynı hızla çalıştı. O devrinin en çok eser veren matematikçisidir. Kesin olmamakla beraber 850–900 civarında kitap ve yayını bulunmaktadır. Çağdaşları ona "canlı analiz" adını takmışlardı. 28 yaşında sol gözü görme özelliğini kaybetti. 50 yaşında her iki gözü de görmez oldu. Son 17 yıllık körlüğü bile onun çalışma azmini, bitmek tükenmek bilmeyen zekasını azaltmadı. Gözlerinin kör olması onun iç alemindeki düşüncelerini daha çok bilinçlendirdi ve açığa vurdu.

Euler, Geometri, trigonometrinin analitik incelenmesi, değişimler hesabı ve sayılar teorisi üzerine ders kitapları yazdı. Tüm okullarda onun kitaplarını okudu.

1727 yılında Bale Üniversitesinde profesör olmak üzere başvurdu. Olumsuz cevap alınca Rusya'nın Saint Petersburg şehrine gitti. Burada 6 yıl kaldı. Daha sonra Berlin'e gitti. Hayatının son 20 yılını burada geçirdi.

Eulerin aklı ve şuuru öldüğü gün olan 7 Eylül 1783 gününe kadar dinç ve açık kaldı.

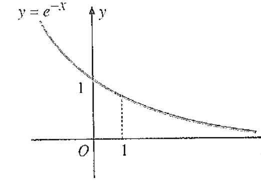
Bugün matematikte sıkça kullandığımız e sayısı Euler tarafından matematiğe sokulmuştur. Bu sayının irrasyonel olduğu yıllar sonra ispatlanmıştır.

Boş bir çuvalın dik durması zordur.

Benjamin FRANKLIN

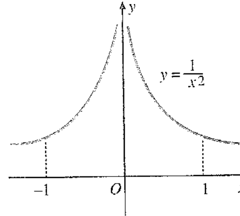
8 GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER

8.1 GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER



Belirli (Riemann) integrali tanımlanırken, hatırlanacağı gibi, $[a,b]$ integrasyon aralığında f fonksiyonu da sınırlıdır. Başka bir deyişle bir f fonksiyonunun bir aralıktaki integralinden bahsedebilmek için $[a, b]$ aralığında fonksiyonun da sınırlı olması gerekir. Fakat birçok fonksiyon $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$ veya $(-\infty, \infty)$ aralıkları üzerinde tanımlıdır. Ayrıca birçok fonksiyon da bazı noktalarda düşey asimtotlara sahip olup sınırsızdır. Örneğin $y = e^{-x}$ eğrisi, $x = 1$ doğrusu ve $0x$–ekseni tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulmak için

$$\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx$$



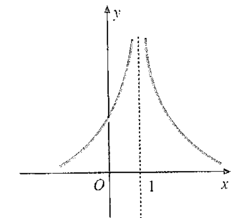
integralini hesaplamak gerekir. Bilindiği gibi, $f(x) = e^{-x}$ fonksiyonu her $t > 1$ için $[1, t]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyondur.

Eğer $y = \dfrac{1}{x^2}$ eğrisi, $x = -1$, $x = 1$ doğruları ve $0x$– ekseni arasında kalan bölgenin alanı hesaplanmak istenirse

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

integralini hesaplamak gerekir. Eğer bu integrale İntegral Hesabın Temel Teoremi uygulanırsa

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\Bigg|_{-1}^{1} = -2$$



bulunur. Bu mümkün değildir, zira alan negatif olamaz. Biraz sonra göreceğimiz gibi sözkonusu olan sonlu olmayan bir alandır. Bazı durumlarda hem aralık hem de fonksiyon sınırsız olabilir. Örneğin $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ eğrisiyle $0x$– ekseni arasında kalan bölgenin $0x$– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmini bulmak için,

$$\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-1)^4}\, dx$$

integralini hesaplamak gerekir. Görüldüğü gibi hem integrasyon aralığı hem de fonksiyon sınırsızdır.

Bu tip integraller, aralığın sınırsız, fonksiyonun sınırsız veya hem aralık hem de fonksiyonun sınırsız olmasına göre adlandırılırlar.

TANIM 8.1 :

a bir reel sayı ve f fonksiyonu her bir $t \geq a$ için $[a,t]$ aralığında integrallenebilir olsun.

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)dx \qquad (8.1)$$

ifadesine f nin $[a, +\infty)$ üzerindeki birinci çeşit genelleştirilmiş integrali denir,

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \qquad (8.2)$$

ile gösterilir. Eğer (8.1) deki limit varsa (8.2) integrali yakınsak, limit yoksa integral ıraksaktır denir.

f fonksiyonunun $(-\infty, b]$ ve $(-\infty, +\infty)$ aralıkları üzerindeki birinci çeşit genelleştirilmiş integralleri de, benzer şekilde

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^b f(x)dx \qquad (8.3)$$

ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \qquad (8.4)$$

biçiminde tanımlanır. Son ifadedeki c sayısı herhangi bir sabit sayıdır. (8.4) ün sağındaki her iki integralin yakınsak olması durumunda $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ integrali yakınsaktır. Buna göre,

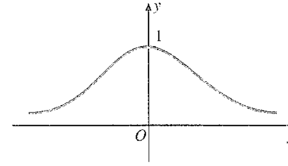
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^c f(x)dx + \lim_{s \to \infty} \int_c^s f(x)dx \qquad (8.5)$$

olacaktır.

ÖRNEK : $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz. Yakınsak olduğunda değerini bulunuz.

Çözüm : $\lim_{t \to \infty} \int_1^t e^{-x} dt = \lim_{t \to \infty} e^{-x}\Big|_1^t = \lim_{t \to \infty} (-e^{-t} + e^{-1}) = \frac{1}{e}$

bulunur. Şu halde integral yakınsak ve değeri $\frac{1}{3}$ tür.



ÖRNEK :

$y = \dfrac{1}{1+x^2}$ eğrisiyle Ox– ekseni arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm :

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \int_t^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{s \to \infty} \int_0^s \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \arctan x \Big|_t^0 + \lim_{s \to \infty} \arctan x \Big|_0^s$$

$$= \lim_{t \to -\infty} (\arctan 0 - \arctan t) + \lim_{s \to \infty} (\arctan s - \arctan 0)$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi$$

br^2 olur.

ÖRNEK :

$\int_0^{\infty} x^2 dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm :

$$\int_0^{\infty} x^2 dx = \lim_{t \to \infty} \int_0^t x^2 dx = \lim_{t \to \infty} \frac{t^3}{3} = +\infty$$

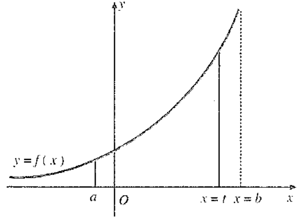
olduğundan verilen integral ıraksaktır.

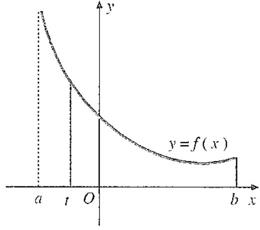
ÖRNEK : $a > 0$ için $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ integralinin karakterini inceliyiniz.

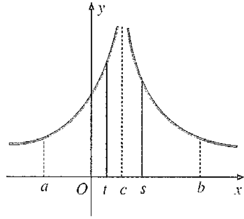
Çözüm :

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \to \infty} \int_a^t \frac{dx}{x^p} = \lim_{t \to \infty} \begin{cases} \ln \dfrac{t}{a}, & p = 1 \quad ise \\ \dfrac{t^{1-p} - a^{1-p}}{1-p}, & p \neq 1 \quad ise \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1 \quad ise \\ +\infty, & p \leq 1 \quad ise \end{cases}$$

olacağından verilen integral $p > 1$ için yakınsak $p \leq 1$ için ıraksaktır.







TANIM

f fonksiyonu $[a,b)$ aralığının herbir kapalı alt aralığı üzerinde integrallenebilir ve $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$ (veya $-\infty$) olsun. Bu takdirde $\int_a^b f(x)dx$ integraline bir **ikinci çeşit genelleştirilmiş integral**, b noktasına da bu integralin bir **singüler noktası**dır denir. Bu integralin değeri

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)dx \qquad (8.6)$$

biçiminde tanımlanır. Sağdaki limit varsa soldaki integral yakınsaktır denir. Yakınsak olmayan integraller ıraksaktır. f fonksiyonu $(a,b]$ aralığının kapalı herbir alt aralığında integrallenebilir ve $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ (veya $-\infty$) oluyorsa, f nin $[a,b]$ üzerindeki ikinci çeşit genelleştirilmiş integrali

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to +a} \int_t^b f(x)dx \qquad (8.7)$$

biçiminde hesaplanır. Limit var olduğunda integral yakınsak, limit varolmadığında integral ıraksaktır. İntegralin singüler noktası $[a,b]$ aralığının bir c iç noktası ise, $[a,b]$ üzerindeki ikinci çeşit genelleştirilmiş integral

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (8.8)$$

biçiminde tanımlanır. Sağdaki her iki integral yakınsak ise soldaki integral yakınsaktır.

ÖRNEK : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}} = +\infty$ olduğundan $x = 1$ bir singüler noktadır.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}} = \lim_{t \to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt[4]{1-x}} = \lim_{t \to 1^-} \int_0^t (1-x)^{-\frac{1}{4}} dx$$

$$= \lim_{t \to 1^-} -\frac{1}{3}(1-x)^{\frac{3}{4}}\Big|_0^t = \lim_{t \to 1^-}\left[-\frac{4}{3}(1-t)^{3/4} + \frac{4}{3}\right] = \frac{4}{3}$$

olduğundan verilen integral yakınsak ve değeri $\frac{4}{3}$ tür.

ÖRNEK : $\int_0^2 \frac{dx}{x^2}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $\int_0^2 \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{t \to 0^+} \int_t^2 x^{-2} dx = \lim\limits_{t \to 0^+} -\frac{1}{x}\Big|_t^2 = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1}{t} - \frac{1}{2} = +\infty$

olduğundan verilen integral ıraksaktır.

ÖRNEK : $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ integralinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm : $p \neq 1$

$$\int_a^t \frac{dx}{(b-x)^p} = \frac{(b-x)^{-p+1}}{p-1}\Big|_a^t = \frac{(b-t)^{1-p}}{p-1} - \frac{(b-a)^{1-p}}{p-1}$$

olacağından,

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t \frac{dx}{(b-x)^p} = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}, & p < 1 \quad ise \\ +\infty, & p > 1 \quad ise \end{cases}$$

dır.

$p = 1$ için

$$\int_a^t \frac{dx}{b-x} = -\ln|b-x|\Big|_a^t = -\ln|b-t| + \ln|b-a|$$

olacağından

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t \frac{dx}{b-x} = \lim_{t \to b^-} -\ln|b-t| + \ln|b-a| = +\infty$$

bulunur. Şu halde

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$$

integrali $p < 1$ için yakınsak, $p \geq 1$ için ıraksaktır.

Benzer şekilde

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$$

integralinin $p < 1$ yakınsak, $p \geq 1$ için ıraksak olduğu gösterilebilir.

ÖRNEK : $\int_0^\pi \tan x \, dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ olduğundan $x = \frac{\pi}{2}$ noktası bir singüler noktadır. Şu halde verilen integral bir ikinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_0^\pi \tan x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \tan x \, dx$$

olur. Sağdaki her iki integralin yakınsak olması halinde soldaki integral yakınsaktır. Bu integrallerden en az birinin ıraksak olması durumunda verilen integral ıraksaktır.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \tan x\,dx = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} \int_0^t \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} (-\ln|\cos x|)\Big|_0^t = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-} (-\ln|\cos t|) = +\infty$$

olduğundan verilen integral ıraksaktır.

ÖRNEK : $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-x^2}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : Verilen integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{1-x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{1-x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{1-x^2}$$

biçiminde iki integralin toplamı olarak yazılabilir.

Bu iki integral de birer ikinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{t\to -1^+} \int_t^0 \frac{dx}{1-x^2} = \lim_{t\to -1^+} \frac{1}{2}\int_t^0 \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \lim_{t\to -1^+} (-\ln|1-x| + \ln|1+x|)\Big|_t^0 = \lim_{t\to -1^+} \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| = \infty$$

olduğundan $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{1-x^2}$ ıraksaktır. Şu halde verilen integral ıraksaktır.

TANIM

Bir integral, hem birinci çeşit genelleştirilmiş integralin hem de ikinci çeşit genelleştirilmiş integralin özelliklerine sahipse, yani fonksiyon hem sınırsız bir aralık üzerinde tanımlı hem de bu aralığın en az bir noktası komşuluğunda sınırsız ise bu integrale **üçüncü çeşit genelleştirilmiş integral** denir.

ÖRNEK : $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : İntegrasyon aralığı sınırsız ve $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$ olduğundan $x = 0$ bir singüler noktadır. O halde verilen integral bir üçüncü çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_0^{1} \frac{dx}{x^2} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

ve $\int_0^{1} \frac{dx}{x^2}$ integrali ıraksak olduğundan verilen integral ıraksaktır.

$\int_0^{\infty} f(x)dx$ integralinin değeri $\int_0^{t} f(x)dx$ integralinin $t \to \infty$ için limiti olduğundan, serinin yakınsaklığı için $\int_0^{t} f(x)dx$ integralini hesaplamak gerekir. Bu bazan mümkün olmayabilir. Bu nedenle bazı yakınsaklık testleri geliştirilmiştir. Bunların ispatları bu kitabın kapsamında olmayan başka bilgilere ihtiyaç göstereceğinden burada ispatlarına girmeyeceğiz.

TEOREM 8.1 (Karşılaştırma Testi) **:**

$[a, +\infty)$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli f ve g fonksiyonları

$0 \le f(x) \le g(x)$ eşitsizliğini sağlasın.

(1) $\int_a^{\infty} g(x)dx$ yakınsak ise $\int_a^{\infty} f(x)dx$ yakınsaktır.

(2) $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ıraksak ise $\int_a^{\infty} g(x)dx$ ıraksaktır.

ÖRNEK : $\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $x \ge 1$ için $x^2 \ge x \Rightarrow -x^2 \le -x \Rightarrow e^{-x^2} \le e^{-x}$ dir. Diğer taraftan

$$\int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\left(-e^{-t} + e^{-1}\right) = \frac{1}{e}$$

olduğundan $\int_1^{\infty} e^{-x}dx$ yakınsaktır. Karşılaştırma testinden $\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ yakınsaktır.

TEOREM 8.2 (Karşılaştırma Testinin Limit Formu) **:**

Pozitif tanımlı bir f fonksiyonu için

$$\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = c$$

olsun.

(1) $0 \le c < \infty$ ve $p > 1$ ise $\int_a^{\infty} f(x)dx$ yakınsaktır.

(2) $0 < c \le \infty$ ve $p \le 1$ ise $\int_a^{\infty} f(x)dx$ ıraksaktır.

ÖRNEK :

$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{9x^4+1}}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm :

$$\lim_{x\to\infty} x^2 f(x) = \lim_{x\to\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{9x^4+1}} = \lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^4}{9x^4+1}} = \frac{1}{3}$$

olur. $c = \frac{1}{3}$ ve $p = 2 > 1$ olduğundan verilen integral yakınsaktır.

NOT : $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ şeklindeki bir integralin yakınsaklık durumunu incelerken $x = -t$ değişken değiştirmesi yapılırsa $\int_{-a}^{\infty} f(-t)dt$ integrali elde edilir. Bu son integralin karakteri bundan önceki testler yardımıyla incelenir.

ÖRNEK :

$\int_{-\infty}^{0} x^5 e^x\, dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $x = -t$ değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\int_{-\infty}^{0} x^5 e^x\, dx = -\int_{0}^{\infty} t^5 e^{-t}\, dt$$

bulunur.

$$\lim_{t\to\infty} t^2 f(t) = \lim_{t\to\infty} t^2 (t^5 e^{-t}) = \lim_{t\to\infty} \frac{t^7}{e^t} = 0$$

ve $p = 2 > 1$ olduğundan $\int_{0}^{\infty} t^5 e^{-t}\, dt$ yakınsak, dolayısıyla $\int_{-\infty}^{0} x^5 e^x\, dx$ yakınsaktır.

ÖRNEK : $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3} dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $x = -t$ denirse

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3} dx = -\int_{1}^{\infty} \frac{1}{t^3} dt$$

bulunur. $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{t^3} dt$ yakınsak olduğundan verilen integral yakınsaktır.

8.3 İKİNCİ ÇEŞİT GENELLEŞTİRİLMİŞ İNTEGRALLER İÇİN YAKINSAKLIK TESTLERİ

İkinci çeşit genelleştirilmiş integraller için de bazı yakınsaklık testleri vardır.

TEOREM 8.3 (Karşılaştırma Testi) **:**
Pozitif tanımlı f fonksiyonunun tek singüler noktası b ve her $x \in [a,b)$ için $f(x) \le g(x)$ olsun.

(1) $\int_{a}^{b} g(x)dx$ yakınsak ise $\int_{a}^{b} f(x)dx$ yakınsaktır.

(2) $\int_{a}^{b} f(x)dx$ ıraksak ise $\int_{a}^{b} g(x)dx$ ıraksaktır.

ÖRNEK :

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x \sin x}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $0 < x \le \frac{\pi}{2}$ için

$$\frac{1}{x \sin x} \ge \frac{1}{x} > 0$$

ve $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{x}$ integrali ıraksak olduğundan verilen integral ıraksaktır.

Singüler noktanın a veya (a,b) aralığındaki bir iç nokta olması halinde de benzer test ifade edilebilir.

ÖRNEK :

$\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^3-1}}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $1 < x \le 2$ için

$$x^3 > x \Rightarrow x^3 - 1 > x - 1 \Rightarrow \sqrt{x^3-1} > \sqrt{x-1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^3-1}} < \frac{1}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)^{1/2}}$$

ve $\int_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ yakınsak olduğundan verilen integral de yakınsaktır.

TEOREM 8.4 (Limit Testi) :

Pozitif tanımlı f fonksiyonunun tek singüler noktası b ve

$$\lim_{x \to b^-} (b-x)^p f(x) = \gamma$$

olsun.

(1) $0 \le \gamma < \infty$ ve $p < 1$ ise $\int_a^b f(x)dx$ yakınsaktır.

(2) $0 < \gamma \le \infty$ ve $p \ge 1$ ise $\int_a^b f(x)dx$ ıraksaktır.

ÖRNEK : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm :

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x)^{1/3} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{1-x}{1-x^2}\right)^{1/3} = \lim_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{1+x}\right)^{1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

olduğundan $\gamma = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ ve $p = \frac{1}{3} < 1$ dir. Şu halde verilen integral yakınsaktır.

NOT : Singüler noktanın a olması halinde benzer test verilebilir. Bu durumda

$$\lim_{x \to a^+} (x-a)^p f(x) = \gamma$$

limitini gözönüne almak gerekir.

ÖRNEK : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^3} dx$ integralinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm :

$$\lim_{x \to 0^+} (x-0)^2 \frac{\sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

olur. $p = 2 > 1$ ve $\gamma = 1$ olduğundan verilen integral ıraksaktır.

Üçüncü çeşit genelleştirilmiş integraller, birinci ve ikinci çeşit genelleştirilmiş integrallerin toplamı biçiminde yazılabileceğinden, bunların yakınsaklığı için toplamdaki herbir integralin yakınsak olması gerekir.

ÖRNEK : Gamma Fonksiyonu denilen

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

integralinin $n > 0$ için yakınsak, $n \le 0$ için ıraksak olduğunu gösteriniz.

Çözüm : Verilen integrali

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \qquad (8.9)$$

biçiminde iki integralin toplamı şeklinde yazalım.

(1) $n \ge 1$ ise (8.9) eşitliğinin sağındaki ilk integral bir belirli integraldir. Çünkü integrant $[0,1]$ aralığında bir sürekli fonksiyondur. Sağdaki ikinci integral birinci çeşit bir genelleştirilmiş integraldir.

$$\lim_{x \to \infty} x^2 (x^{n-1} e^{-x}) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{n+1}}{e^x} = 0$$

olduğundan yakınsaktır, zira $p = 2 > 1$, $c = 0$ dır.

(2) $0 < n < 1$ ise (8.9) eşitliğinin sağındaki ilk integral bir ikinci çeşit genelleştirilmiş integraldir.

$$\lim_{x \to 0^+} x^{1-n} (x^{n-1} e^{-x}) = \lim_{x \to 0^+} e^{-x} = 1$$

olduğundan bu integral yakınsaktır, zira $p = 1 - n < 1$ dir. İkinci integral birinci çeşit bir genelleştirilmiş integral olup yakınsaktır.

(3) $n = 0$ için (8.9) eşitliği

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$$

biçimini alır.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} e^{-x} = 1$$

olduğundan birinci integral ıraksaktır. Şu halde $\Gamma(n)$ integrali $n = 0$ için ıraksaktır.

(4) $n < 0$ olsun.

$$\lim_{x \to 0^+} x (x^{n-1} e^{-x}) = +\infty$$

olduğundan (8.9) un sağındaki ilk integral ıraksaktır. Şu halde $\Gamma(n)$ integrali $n > 0$ için yakınsak, $n \le 0$ için ıraksaktır.

1. Aşağıdaki integrallerin cinsini belirtiniz.

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+\cos^2 x}$ b) $\int_0^\infty e^{-3x}\,dx$

c) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{\ln x}\,dx$ ç) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx$

d) $\int_0^\infty \frac{1-\cos 2x}{x}\,dx$ e) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx$

f) $\int_0^\infty \sin x\,dx$ g) $\int_0^1 \frac{dx}{9x^2-1}$

h) $\int_0^\infty \frac{dx}{x-2}$ ı) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2-x}$

2. Aşağıdaki integrallerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz. Yakınsak olanların değerini bulunuz.

a) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ b) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

c) $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ ç) $\int_0^\infty x\,e^{-x^2}\,dx$

d) $\int_0^\infty e^{-x}\sin x\,dx$ e) $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

f) $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^3}$ g) $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$

ı) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x}$ i) $\int_1^\infty \frac{x}{x^4+1}\,dx$

j) $\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$ k) $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1}$

l) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ m) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$

n) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$ o) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}$

ö) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ p) $\int_0^1 \frac{dx}{x^3}$

r) $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-4}$ s) $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$

ş) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$ t) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$

3. $a>0$ olsun. $\int_0^a x^p\,dx$ integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter şartın $p>-1$ olduğunu gösteriniz.

4. $a>0$ için aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

a) $\int_0^\infty e^{-ax}\,dx$ b) $\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$

5. Aşağıdaki integrallerin yakınsaklığını karşılaştırma testinden yararlanarak inceleyiniz.

a) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ b) $\int_a^\infty \frac{dx}{1+x^{3/2}}$

c) $\int_0^\infty \frac{dx}{4+e^x}$ ç) $\int_2^\infty \frac{dx}{\ln x}$

d) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+\ln x}$ e) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2-4x+5}$

f) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{e^x-x}}$ g) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}$

h) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}+1}$ ı) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x\cos x}\,dx$

6. Aşağıdaki integrallerin yakınsak olduğunu gösteriniz.

a) $\int_0^1 \frac{x\ln x}{(1+x)^2}\,dx$ b) $\int_0^1 \ln x\,\ln(1+x)\,dx$

c) $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{1-x}}\,dx$ ç) $\int \frac{x^{p-1}}{\ln x}\,dx$ $(p>-1)$

7. $y=x^{-1/2}$, $y=\frac{1}{2}x^{-1/3}$ eğrileri ile $x=1$ doğrusu arasında kalan bölgenin alanını bulunuz.

8. Birinci bölgede $y=\frac{1}{x^2}$ ve $y=\frac{4}{x^2}$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

9. f fonksiyonu $(-\infty,\infty)$ üzerinde sürekli ve $\int_0^\infty f(x)\,dx$ integrali yakınsak olsun.

a) f çift ise $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = 2\int_0^\infty f(x)dx$

b) f tek ise $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = 0$

olacağını gösteriniz.

1. $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx$ integralini hesaplayınız.

2. Aşağıdaki integralleri yakınsak yapan p ve q sayılarını bulunuz.

a) $\int_0^1 x^p(1-x^2)^q\,dx$

b) $\int_1^2 \frac{dx}{x^q(\ln x)^p}$

3. $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ olduğu biliniyor.

Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\pi}$

b) $\int_0^\infty x^2e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

4. $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}$ integralinin yakınsak olması için gerek ve yeter şartın $p>1$ olduğunu gösteriniz.

5. $x=\tan t$ dönüşümü yardımıyla

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & n=1 \text{ ise} \\ \dfrac{1.3.5...(2n-3)}{2.4.6...(2n-2)}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n>1 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğunu gösteriniz.

6. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\Gamma(1)=1$

b) Her $n\in R^+$ için $\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)$

c) Her $n\in N$ için $\Gamma(n+1)=n!$

7. $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ eşitliğinden yararlanarak

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \Gamma\left(\frac{3}{2}\right), \Gamma\left(\frac{5}{2}\right), \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$,

ifadelerini hesaplayınız.

8. Aşağıdaki integralleri Γ fonksiyonundan yararlanarak hesaplayınız.

a) $\int_0^\infty x^2e^{-x^3}\,dx$ b) $\int_0^\infty \sqrt{x}\,e^{-x^3}\,dx$

c) $\int_0^\infty x^{-2x^2}\,dx$ ç) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}}$

9. $a>0$ ve $n>0$ için

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}\,dx = a^{-n}\Gamma(n)$$

olduğunu gösteriniz.

10. $r>0$ için

$$\int_0^\infty e^{-x^r}\,dx = \frac{1}{r}\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)$$

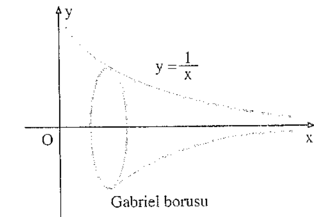
olduğunu gösteriniz.

11. $B=\{(x,y): x\geq 1 \text{ ve } 0\leq y\leq \frac{1}{x}\}$

bölgesinin alanının sonsuz olduğunu gösteriniz. Bu bölgenin 0x– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacminin sonlu olduğunu gösteriniz.

$y=\frac{1}{x}$, $x\geq 1$

denklemli eğrinin 0x– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanının sonsuz olduğunu ispatlayınız. [Yüzey alanı sonsuz, fakat hacmi sonlu olan bu dönel yüzeye Gabriel Borusu adı verilir.]



Gabriel borusu

G. F. B. RIEMANN (1826 – 1866)

Bir Luteryan papazının altı çocuğundan ikincisi olan Riemann, 17 Eylül 1826 günü Hannover'in bir köyünde doğdu. Riemann'ın çocukluğu yokluklar içinde geçti. Birçok yazar Riemann ve kardeşlerinin hastalıklarını ve genç yaşta ölmelerini, kalıtımsal bir hastalığa değil de, küçükken iyi beslenemedikleri gerçeğine bağlarlar. Örneğin anneleri daha çocuklar büyümeden ölmüştü.

Riemann gençliğinden beri çekingen olduğu için kimseye güvenmemiş, bir toplulukta konuşmaktan veya dikkatleri kendi üzerine çekmekten kaçınmıştır.

Riemann ilk derslerini evde babasından almıştır. Daha ilk derslerinde bitmek, tükenmek bilmeyen bir öğrenme arzusu gösterdi. Önce tarihle işe başladı. 6 yaşına gelince matematik yeteneği sivrilmeye başladı. O tüm problemleri çözmekle kalmıyor, zor problemler hazırlayarak kardeşlerini güç duruma sokuyordu. Yaratıcı zeka o yaşlarda kendini gösteriyordu. On yaşına gelince Schulz adındaki bir öğretmenden yüksek aritmetik ve geometri dersleri aldı. Kısa bir süre sonra öğretmen bilgice öğrenciden geride kaldı. Çünkü Riemann öğretmeninden daha iyi ve dikkat çekici çözümler buluyordu.

14 yaşında Gymnasium'un üçüncü sınıfına girmek üzere büyük annesinin yanına gitti.

Riemann daha lise yıllarında her şeyin tam olmasını istiyordu. Bu özellik onun eser yayınlamasını yavaşlatıyordu. Fakat yayınladığı eserler tam anlamıyla kusursuzdu.

Lise müdürü Schmalfus Riemann'ın matematikteki yeteneğini görerek, kendi özel kütüphanesini onun emrine sundu. Önce Legendre'ın Sayılar Teorisi adlı eserini okudu. 859 sayfa olan bu eser oldukça zor ve düşünmeyi gerektiriyordu. Riemann 6 gün sonra kitabı gerdi verdi. Müdür "Nereye kadar okuyabildin?" diye sorunca, Riemann "Değerli bir kitaptı. Tümünü okudum." diye çevap verdi. Söyledikleri doğruydu. Çünkü aylar sonra yapılan bir sınavda bu kitaptan sorulan zor bir soruyu tam olarak yapmıştı. Riemann'ın asal sayılara verdiği önem Legendre'ın bu kitabıyla başlar. Riemann'ın en derin ve en kuvvetli çalışmalarından biri verilen bir sayıdan küçük kalan asal sayıların sayısını yaklaşık olarak veren formülü bulmasıdır. Bu araştırma 8 sayfalık bir çalışma olup Berlin akademisinin aylık notlarında basıldı.

Riemann lise yıllarında sadece Legendre'ın eserini okumakla kalmadı. Euler'in eserlerini de inceledi. 1845 yıllarında Euler'in eserlerinin modası geçtiği halde o bunlardan çok yararlandı. Euler'den sonra Gaus, Abel ve Cauchy çok yenilikler yapmışlardı. Euler'in eserleri onu iyi bir analizci yaptı. Matematikte büyük buluşlara götürdü.

Riemann daha sonra Jacobi, Dirichlet, Steiner ve Einstein'in yanında yeni matematiği öğrenmek için Berlin'e gitti. Burada birçok konu üzerinde çalıştı.

Riemann'ın matematiğe yaptığı en önemli hizmeti karmaşık fonksiyonlar üzerine yaptığı çalışmasıdır. Bu çalışmayı 21 yaşında yapmıştır. Riemann, matematik dışında başka konularla da ilgilenmiştir. Felsefe, manyetik ve elektrik alanları bunların başında gelir.

Riemann küçük çapta bir kitap olacak kadar eser yazdı. Fakat yazdığı herşey büyük yenilikler içeriyordu. Eğer beden yapısı zayıf olmasaydı daha çok şey yapacaktı.

Riemann'ı ölümsüz yapan çalışmalardan biri de kendi adıyla anılan Riemann Geometrisidir.

Riemann 20 Temmuz 1866 da hayata gözlerini yumdu. Öldüğünde 39 yaşındaydı.

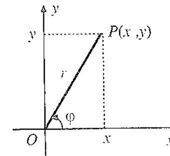
Bir ulus savaş alanlarında ne kadar zaferler elde ederse etsin, o zaferin sürekli sonuçlar vermesi, ancak kültür ordusuyla mümkündür.

ATATÜRK

9 KUTUPSAL KOORDİNATLAR

9.1 KUTUPSAL KOORDİNATLAR

Kartezyen koordinat sisteminde bir $P(x,y)$ noktası alalım. Bu noktanın $O(0,0)$ noktasına olan uzaklığı r, $[OP]$ doğru parçasının Ox-ekseniyle pozitif yönde yaptığı açının ölçüsü φ ile gösterilirse



$$x = r\cos\varphi \qquad (9.1)$$
$$y = r\sin\varphi$$

olur. Bu (r,φ) ikilisine P noktasının kutupsal koordinatları, O noktasına kutup noktası, φ açısına kutup açısı, Ox- eksenine de kutup ekseni adı verilir.

Bilindiği gibi düzlemde herbir noktanın bir tek kartezyen koordinatı vardır. Halbuki kutupsal koordinatlarda durum böyle değildir. Herbir noktanın birden fazla kutupsal koordinatları vardır.Örneğin (r, φ) bir noktanın kutupsal koordinatları ise $(r, \varphi + 2\pi)$, $(r, \varphi + 4\pi)$, ... , $(r, \varphi + 2k\pi)$ koordinatları da aynı noktanın kutupsal koordinatlarıdır.

Bir (r, φ) sayı ikilisini bir noktanın kutupsal koordinatları olarak gözönüne alabilmek için bazı kabullere ihtiyaç vardır. Bunlar şunlardır :

1) (r, φ) bir P noktasının kutupsal koordinatları ise her $k \in Z$ için

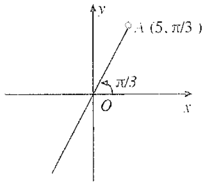
   $(r, \varphi + 2k\pi)$ de P noktasının kutupsal koordinatlarıdır.

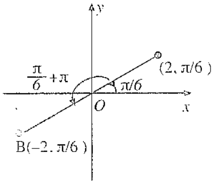
2) (r, φ) bir P noktasının kutupsal koordinatları ise

   $(-r, \varphi + \pi)$ de aynı noktanın kutupsal koordinatlarıdır.

   Yani $(-r, \varphi)$ ile $(r, \varphi + \pi)$ aynı noktayı gösterir.

3) Her φ için $(0, \varphi)$ koordinatları kutbun (orijinin) kutupsal koordinatlarıdır.





ÖRNEK : $A(5,\frac{r}{3})$ ve $B(-2,\frac{\pi}{6})$ noktalarını düzlemde gösteriniz.

Çözüm : $A(5,\frac{\pi}{3})$ noktası orijinden geçen ve $0x$– ekseniyle $\frac{\pi}{3}$ radyanlık açı yapan doğru üzerinde bulunan ve orijinden (kutup noktasından) 5 birim uzakta bulunan noktadır.

$(-2,\frac{\pi}{6})$ noktası ile $(2,\frac{\pi}{6}+\pi)=(2,\frac{7\pi}{6})$ noktası aynı noktayı gösterdiğinden, $(-2,\frac{\pi}{6})$ noktasını bulmak için $(2,\frac{\pi}{6})$ noktasının kutba göre simetriğini almak yetecektir.

r ve φ kutupsal koordinatlarını x ve y kartezyen koordinatları cinsinden ifade etmek mümkündür.

(9.1) de her iki tarafın karesi alınır ve toplanırsa

$$x^2+y^2=r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=r^2$$

bulunur.

(9.1) de ikinci eşitlik birinciye bölünürse

$$\frac{y}{x}=\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi}=\tan\varphi \Rightarrow \varphi=\arctan\frac{y}{x}$$

bulunur. Buna göre r ve φ verildiğinde x ve y kartezyen koordinatları

$$r^2=x^2+y^2$$
$$\tan\varphi=\frac{y}{x} \qquad (9.2)$$

bağıntılarından yararlanılarak hesaplanabilir.

ÖRNEK : $P(3,\sqrt{3})$ noktasının kutupsal koordinatlarını bulunuz.

Çözüm :

$r^2=x^2+y^2=9+3=12 \Rightarrow r=2\sqrt{3}$ olur.

$\tan\varphi=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{6}$ olacağından verilen noktanın kutupsal koordinatları $(2\sqrt{3},\frac{\pi}{6})$ olur.

ÖRNEK : Kutupsal koordinatları $A(2,\frac{\pi}{4})$ ve $B(-2,\frac{\pi}{3})$ olan noktaların kartezyen koordinatlarını bulunuz.

Çözüm :

$$x=r\cos\varphi=2\cos\frac{\pi}{4}=2.\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$y=r\sin\varphi=2\sin\frac{\pi}{4}=2.\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

olduğundan A noktasının kartezyen koordinatları $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ dir. B noktasının kartezyen koordinatları da

$$x=r\cos\varphi=(-2)\,.\cos\frac{\pi}{3}=(-2)\frac{1}{2}=-1$$

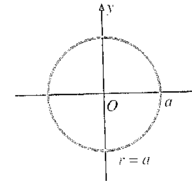
$$y=r\sin\varphi=(-2)\,.\sin(-2)\frac{\sqrt{3}}{2}=-\sqrt{3}$$

olur.

Kartezyen koordinat sisteminde olduğu gibi eğrilerin denklemini kutupsal koordinatlar cinsinden de ifade etmek mümkündür. Kartezyen koordinatlar sistemindeki denklemi verilen bir eğrinin kutupsal koordinatlar sistemindeki denklemini bulmak için verilen denklemde x yerine $r\cos\varphi$, y yerine $r\sin\varphi$ yazmak yeterlidir. Mümkün olduğu takdirde, r çekilerek

$$r=f(\varphi)$$

şeklinde bir denklem elde edilir. Şimdi bununla ilgili olarak bazı örnekler yapalım.



ÖRNEK : Kartezyen koordinatlar sistemindeki denklemi $x^2+y^2=a^2$ olan çemberin kutupsal koordinatlar sistemindeki denklemini yazınız.

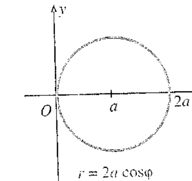
Çözüm : Verilen denklemde $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ yazılırsa

$$r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi=a^2 \Rightarrow r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=a^2 \Rightarrow r^2=a^2 \text{ bulunur.}$$

Buradan söz konusu çemberin denklemi olarak

$$r=a$$

bulunur.



ÖRNEK : Merkezi $(a,0)$ da olan a yarıçaplı çemberin kutupsal koordinatlar sistemindeki denklemini yazınız.

Çözüm : Bilindiği gibi bu çemberin kartezyen koordinat sistemindeki denklemi

$$(x-a)^2+y^2=a^2$$

dir. $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ yazılırsa

$$(r\cos\varphi-a)^2+r^2\sin^2\varphi=a^2 \Rightarrow r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=2\,r\,a\cos\varphi \Rightarrow$$

$$r=2a\cos\varphi$$

bulunur.

ÖRNEK : Kutupsal koordinatlar sistemindeki denklemi

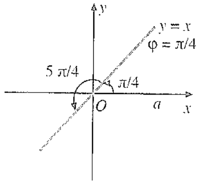
$r^2 \cos\varphi \sin\varphi = 1$

olan eğrinin kartezyen koordinatları sistemindeki denklemini bulunuz. Bu eğrinin cinsini belirtiniz.

Çözüm : $\cos\varphi = \frac{x}{r}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r}$ yazılabilir. Bu değerler verilen denklemde yerine yazılırsa,

$x\,y = 1$

bulunur. Şu halde verilen eğri bir hiperboldür.



ÖRNEK : $y = x$ doğrusunun kutupsal koordinatlardaki denklemini yazınız.

Çözüm : Verilen denklemde $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ yazılırsa

$r\sin\varphi = r\cos\varphi \Rightarrow \sin\varphi = \cos\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$ veya $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ bulunur. $0x$–ekseniyle $\frac{\pi}{4}$ radyanlık açı yapan doğru ile $\frac{5\pi}{4}$ radyanlık açı yapan doğru aynı doğru olduğundan istenilen denklem olarak

$\varphi = \frac{\pi}{4}$

alınabilir. Kutup (orijin) noktasından geçen tüm doğruların denklemi

$\varphi = \varphi_0$

biçimindedir.

ÖRNEK : Kartezyen koordinat sistemindeki denklemi

$(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2) = 4x^2$

olan eğrinin kutupsal koordinat sistemindeki denklemini bulunuz.

Çözüm : x yerine $r\cos\varphi$, y yerine $r\sin\varphi$ yazılırsa

$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 + 2(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi) = 4\,r^2\cos^2\varphi \Rightarrow$

$r^4 + 2r^2 = 4r^2\cos^2\varphi \Rightarrow$

$r^2 = 4\cos^2\varphi - 2 = 2\,(2\cos^2\varphi - 1) \Rightarrow$

$r^2 = 2\cos 2\varphi$

bağıntısı elde edilir.

Bir eğri, üzerindeki bir noktanın kutupsal koordinatları r ve φ olmak üzere, $r = f(\varphi)$ olarak tanımlandığında bu eğri üzerindeki bir (x,y) noktasının koordinatları

$$\begin{cases} x = f(\varphi)\cos\varphi \\ y = f(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$$

olacaktır. Bu, verilen eğrinin parametrik gösteriminden başka bir şey değildir. Şimdi buradan yararlanarak. $r = f(\varphi)$ eşitliği ile tanımlanan bir eğrinin bir kutup açısına karşılık gelen bir $P(r,\varphi)$ noktasındaki teğetinin eğimini bulalım.

$$dx = d\left[r\cos\varphi\right] = \frac{d}{d\varphi}(r\cos\varphi)\,d\varphi = (r'\cos\varphi - r\sin\varphi)d\varphi$$

$$dy = d\left[d\sin\varphi\right] = \frac{d}{d\varphi}(r\sin\varphi)\,d\varphi = (r'\sin\varphi + r\cos\varphi)\,d\varphi$$

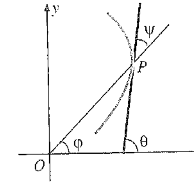
olduğundan, teğetin m eğimi,

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$$

olur. Bunun bir anlama sahip olması için f nin sürekli türevlere sahip olması gerektiği açıktır.

θ, teğetin $0x$– ekseni ile yaptığı açının pozitif yöndeki ölçüsü olsun. Bu takdirde,

$$\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}$$



olur. OP doğrusunun teğetle pozitif yönde yaptığı açının ölçüsü ψ ise $\psi = \theta - \varphi$ olacağından

$$\tan\psi = \tan(\theta - \varphi) = \frac{\tan\theta - \tan\varphi}{1 + \tan\theta\tan\varphi} = \frac{\frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi} - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}{1 + \frac{r\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - \sin\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}}$$

olur. gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\tan\psi = \frac{r}{r'}$$

bulunur. Teğetin eğim açısının ölçüsü

$$\theta = \psi + \varphi$$

olur.

ÖRNEK : $r = 2(1 + \sin\varphi)$ eğrisinin $A(\frac{\pi}{6}, 3)$ noktasındaki teğetinin denklemini yazınız.

Çözüm :

$$\tan\psi = \frac{r}{r'} = \frac{2(1+\sin\varphi)}{2\cos\varphi} = \frac{1+\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

olduğundan $\psi = \frac{\pi}{3}$ dür. Şu halde teğetin eğim açısının ölçüsü

$$\theta = \psi + \varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

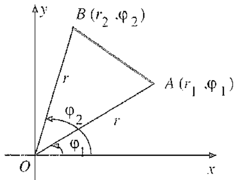
olur. O halde teğet Ox– eksenine dik olan bir doğrudur. Dolayısıyla $x = a$ biçiminde bir denklemi vardır. Değme noktasının apsisi

$$x = r\cos\varphi = 2(1+\sin\varphi)\cos\varphi = 2(1+\sin\frac{\pi}{6})\cos\frac{\pi}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

olduğundan teğetin denklemi $x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ olur. Teğetin kutupsal koordinatlarındaki denklemi

$$r\cos\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

olacaktır.



ÖRNEK : $A(r_1, \varphi_1)$, $B(r_2, \varphi_2)$ noktaları arasındaki uzaklığın

$$|AB| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

olacağını gösteriniz. Bundan yararlanarak $A(12, \frac{3\pi}{4})$ ve $B(16, \frac{5\pi}{4})$ noktaları arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

Çözüm : Yandaki şekilde AOB üçgenine kosinüs teoremi uygulanırsa

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB|\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

bulunur. Buradan

$$|AB| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

bulunur.

$$r_1 = 12, \quad r_2 = 16, \quad \varphi_1 = \frac{3r}{4}, \quad \varphi_2 = \frac{5r}{4}$$

alınırsa

$$|AB| = \sqrt{(12)^2 + (16)^2 - 2.12.16.\cos\frac{\pi}{2}} = 20$$

birim olur.

1. Aşağıda kutupsal koordinatları verilen noktaların kartezyen koordinatlarını yazınız.

a) $(2, \frac{\pi}{3})$ b) $(2, -\frac{\pi}{3})$ c) $(3,0)$

ç) $(-3,0)$ d) $(-3, \pi)$ e) $(-3, 2\pi)$

f) $(-2, \frac{\pi}{3})$ g) $(2, \frac{2\pi}{3})$ h) $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

ı) $(-1, 7\pi)$ i) $(2\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3})$ j) $(1, \frac{\pi}{4})$

2. Aşağıdaki noktaların kutupsal koordinatlarını bulunuz.

a) $(-1, -1)$ b) $(\sqrt{3}, -1)$ c) $(2,2)$

d) $(-1, \sqrt{3})$ e) $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ f) $(-3, \sqrt{3})$

3. Aşağıdaki noktaları koordinat düzleminde gösteriniz.

a) $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ b) $(2,0)$ c) $\left(-2, \frac{\pi}{2}\right)$

d) $(-2,0)$ e) $\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$ f) $\left(-2, \frac{\pi}{6}\right)$

g) $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ h) $\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$

4. Aşağıda kartezyen koordinatlardaki denklemleri verilen doğru ve eğrilerin kutupsal koordinatlardaki denklemini yazınız.

a) $x = 4$ b) $x = 2y$ c) $xy = 1$

ç) $y = x^2$ d) $y = 4$ e) $x^2 + y^2 = 16$

f) $x^2 + y^2 = 4$ g) $x + y = 2$ h) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

5. Aşağıda kutupsal koordinatlardaki denklemleri verilen doğru ve eğrilerin kartezyen koordinatlardaki denklemlerini yazınız. Bunların grafiklerini çiziniz.

a) $r\cos\varphi = 2$ b) $r\sin\varphi = -1$

c) $\sin\varphi = \cos\varphi$ ç) $r\cos\varphi + r\sin\varphi = 1$

d) $r^2 = 4r\sin\varphi$ e) $r^2\sin 2\varphi = 2$

f) $r = \cot\varphi \,.\, \csc\varphi$ g) $r = \csc\varphi\, e^{r\cos\theta}$

h) $r\sin\varphi = \ln r + \ln\cos\varphi$ ı) $r = 2\sin\varphi - 4\cos\varphi$

i) $r^2 + 2r^2\cos\varphi\sin\varphi = 4$ j) $\sin^2\varphi = \cos^2\varphi$

k) $r\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = 3$ l) $r\cos\varphi = \sin 2\varphi$

6. Aşağıda kartezyen koordinatlardaki denklemi verilen eğrilerin kutupsal koordinatlardaki denklemlerini yazınız. Mümkün olanların $r = f(\varphi)$ biçiminde yazınız.

a) $x^2 + y^2 = (\arctan\frac{y}{x})^2$ b) $x^4 = x^2 + y^2$

c) $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ d) $y^2 = \frac{x^3}{2 - x}$

e) $y^2 = \frac{x^2(3 - x)}{1 + x}$ f) $x^2 - y^2 = 25\sqrt{x^2 + y^2}$

7. Aşağıda kutupsal koordinatlardaki denklemi verilen eğrilerin kartezyen koordinatlardaki denklemlerini yazınız.

a) $r = 3$ b) $\varphi = \frac{3\pi}{4}$

c) $r = -5\cos\varphi$ ç) $r = 1 - \cos 2\varphi$

d) $r = 1 - \cos^2\varphi$ e) $r = \sin 2\varphi$

f) $r = 2 + \sin\varphi$ g) $r^2 = \cos 2\varphi$

h) $\tan\varphi = 6$ ı) $\cot\varphi = 3$

i) $r\cot\varphi = 3$ j) $r = 2\sin\varphi\cot\varphi$

8. $A(-2,0)$ ve $B(2,0)$ noktalarına olan uzaklıkları çarpımı 16 olan noktaların geometrik yerinin denklemini bulunuz. Bu denklemi kutupsal formda yazınız.

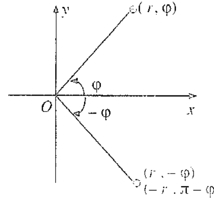
9. $A\left(3, -\frac{4\pi}{9}\right)$ ve $B\left(5, \frac{3\pi}{14}\right)$ bir $ABCD$ paralelkenarının komşu iki köşesidir. Bu paralelkenarın köşegenleri kutup noktasında kesiştiklerine göre diğer iki köşesinin koordinatlarını bulunuz.

10. $A\left(5, -\frac{\pi}{12}\right)$, $B\left(8, \frac{\pi}{4}\right)$ noktaları arasındaki uzaklığı hesaplayınız.

$r = f(\varphi)$ eşitliğiyle verilen eğriyi çizmek için şu yolu takip etmekte yararı vardır:

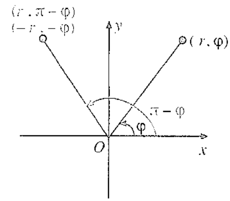
(1) Tanım kümesi bulunur.

(2) f periyodik ise periyodu bulunur. Periyot T ise T uzunluktaki bir aralıkta inceleme yapmak yeterdir. Diğer tüm aralıklarda fonksiyonun aldığı değerler bu aralıkta aldığı değerlerle aynıdır.

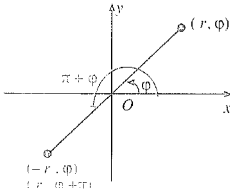


(3) Simetri araştırılır. Simetriyi araştırmanın belli başlı birkaç yolu vardır. Şimdi bunları verelim.

(a) (r,φ) verilen denklemi sağladığında $(r, -\varphi)$ veya $(-r, \pi - \varphi)$ denklemi sağlarsa eğri kutup eksenine ($0x$– eksenine) göre simetriktir. Zira $(r, -\varphi)$ ve $(-r, \pi - \varphi)$ noktaları (r, φ) noktasının $0x$– eksenine göre simetriğidir. Şu halde f bir çift fonksiyon ise eğri $0x$– eksenine göre simetriktir.

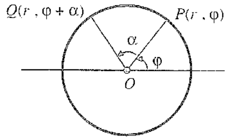


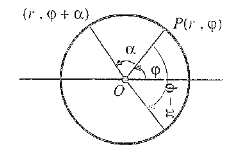
b) (r, φ) verilen denklemi sağladığında $(-r, -\varphi)$ veya $(r, \pi - \varphi)$ de denklemi sağlarsa, eğri $0y$– eksenine göre simetriktir. Zira $(-r, -\varphi)$ veya aynı noktayı gösteren $(r, \pi - \varphi)$ noktası ile (r, φ) noktası $0y$– eksenine göre simetriktir. Şu halde f tek fonksiyon ise grafik $0y$– eksenine göre simetriktir.



c) (r, φ) denklemi sağladığında $(-r, \varphi)$ veya aynı noktayı gösteren $(r, \pi + \varphi)$ verilen denklemi sağlarsa eğri O kutup noktasına göre simetriktir. Zira $(-r, \varphi)$ ile (r, φ) noktaları O kutup noktasına göre simetriktir.

d) (r, φ) verilen denklemi sağladığında bir α reel sayısı için $(r, \varphi + \alpha)$ da denklemi sağlarsa $P(r, \varphi)$ ile $Q(r, \varphi + \alpha)$ aynı çember üzerindedir. Q noktasını elde etmek için P noktasını pozitif yönde α kadar döndürmek yeterdir. Q noktasının kutup etrafında α kadar döndürülmesiyle elde edilen R noktası da eğri üzerinde bir noktadır. Aynı şey R nin α kadar döndürülmesiyle elde edilecek nokta için de söylenebilir. Bu durumda incelemeyi α uzunluğundaki bir aralıkta yapmak yeterlidir. Bu şekilde elde edilen eğri parçasını kutup etrafında α kadar döndürmek ve bu döndürmeleri, eğri kendi üzerine kapanıncaya kadar devam ettirmek suretiyle eğrinin çizimi tamamlanır.





e) (r, φ) denklemi sağladığında bir α sayısı için $(-r, \varphi + \alpha)$ da denklemi sağlarsa, yani $f(\varphi + \alpha) = -f(\varphi)$ ise, $P(r, \varphi)$ noktası ile $Q(-r, \varphi + \alpha)$ noktası aynı çember üzerinde bulunur. Diğer taraftan $Q(-r, \varphi + \alpha)$ ile $(r, \varphi + \alpha - \pi)$ noktaları aynı olduğundan ve $\alpha + \varphi - \pi = \varphi - (\pi - \alpha)$ yazılabildiğinden Q noktasını bulmak için P noktasını φ açısının ters yönünde $\pi - \alpha$ kadar çevirmek yeterdir. Buna göre eğrinin α uzunluğundaki bir aralıkta çizimini yapıp, elde edilen eğri parçasını negatif yönde $\pi - \alpha$ kadar döndürmelidir. Döndürme işlemi, eğri kendi kendisi ile üst üste gelinceye kadar devam etmelidir.

4) $r' = f'(\varphi)$ türevinin işareti incelenerek, eğrinin kutba nerede yaklaştığı, nerede uzaklaştığı saptanır.

5) Fonksiyonun inceleme aralığındaki özel noktalarda (fonksiyonun değerlerinin kolayca hesaplanabildiği noktalarda) aldığı değerler bulunur.

6) Değişim tablosu yapılır. Bulunan değerler bu tabloda belirtilir.

7) Değişim tablosuna göre çizim yapılır.

8) Simetri söz konusu ise, gerekli simetriler alınarak çizim tamamlanır.

Şimdi bazı eğrilerin grafiklerini çizelim.

ÖRNEK : $r = 2(1 + \sin\varphi)$ eğrisini çiziniz.

Çözüm :

(1) Fonksiyon R üzerinde tanımlıdır.

(2) $\sin\varphi$, 2π periyotlu olduğundan fonksiyon 2π periyotludur. Şu halde inceleme 2π uzunluğundaki bir aralıkta yapılmalıdır.

(3) $(r, \pi - \varphi)$ nin denklemi sağladığını gösterelim.

$$r = 2(1 + \sin(\pi - \varphi)) \Rightarrow r = 2(1 + \sin\varphi)$$

olduğundan eğri $0y$– eksenine göre simetriktir. Şu halde incelemeyi π uzunluğundaki $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında yapmak yeterdir.

(4) $r' = 2\cos\varphi$ dir. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında $\cos\varphi > 0$ olduğundan $r' > 0$ dır. Şu halde açı büyüdükçe r büyümekte, yani eğrinin noktaları kutuptan uzaklaşmaktadır.

(5) Bazı özel noktalarda aldığı değerleri bulalım.

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(1 + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2(1 - 1) = 0$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(1 + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - \sqrt{3} \cong 0,27$$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(1 + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 - \sqrt{2} \cong 0,59$$

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(1 + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$$

$f(0) = 2(1 + \sin 0) = 2$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(1 + \sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(1 + \sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 + \sqrt{2} \cong 3,41$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(1 + \sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + \sqrt{3} \cong 3,73$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(1 + \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2(1 + 1) = 4$

(6) Değişim tablosu

φ	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		$-\frac{\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{6}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
r'	0	+		+		+		+		+		+		+		+	0
r	0		$2-\sqrt{3}$		$2-\sqrt{2}$		1		2		3		$2+\sqrt{2}$		$2+\sqrt{3}$		4

(7) Bu tabloya göre çizim yanda yapılmıştır. [(r, φ) noktaları işaretlenip bunlar bir eğriyle birleştirilmiştir.]

(8) Eğri $0y$– eksenine göre simetrik olduğundan verilen $r = 2(1 + \sin\varphi)$ eğrisinin grafiği yandaki gibi olacaktır. Bu eğriye kardiyoid adı verilir.

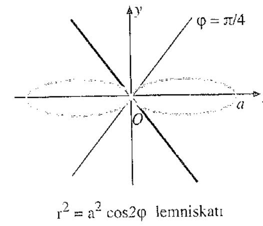
$r = a(1 - \sin\varphi)$, $r = a(1 + \cos\varphi)$, $r = a(1 - \cos\varphi)$ denklemleri de birer kardioid denklemidir.

ÖRNEK : $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ eğrisini çiziniz.

Çözüm : $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ olduğundan $r = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi}$ yazılabilir. $\cos 2\varphi$ nin periyodu π olduğundan inceleme π uzunluğunda bir aralık üzerinde yapılmalıdır. Tanım kümesine ait her bir φ değerine iki farklı r değeri karşılık geldiğinden, eğri kutup noktasına göre simetriktir. Şu halde, $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ eğrisi çizilmeli, elde edilen eğrinin kutba göre simetriği alınmalıdır. $\cos 2\varphi \geq 0$ olması gerektiğinden $-\frac{\pi}{2} \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ olmalıdır. Diğer taraftan $f(-\varphi) = f(\varphi)$ olduğundan o eğri kutup eksenine göre simetriktir. O halde $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ aralığında inceleme yapmak yetecektir. $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ aralığında çizilen eğrinin, kutup eksenine göre simetriği alındıktan sonra, elde edilen eğrinin kutup noktasına göre simetriği alınacaktır.

$$r' = \frac{-2\sin 2\varphi}{2\sqrt{\cos 2\varphi}} \leq 0$$

dır.



$r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ lemniskatı

φ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$
r'		−		−	
r	a	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	↘	0

Bu tabloya göre çizilen eğri yanda verilmiştir. Bu eğri parçasının önce kutup eksenine göre simetriği alınır, sonra elde edilen kapalı eğrinin kutup noktasına göre simetriği alınırsa lemniskat denilen yandaki eğri bulunur.

ÖRNEK : $r = 2 + 4\cos\varphi$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm : Fonksiyon 2π periyotludur. $[-\pi, \pi]$ aralığında çizim yapmak yeterdir. Diğer taraftan $f(-\varphi) = 2 + 4(\cos(-\varphi)) = 2 + 4\cos\varphi = f(\varphi)$ olduğundan grafik kutup eksenine göre simetriktir. Şu halde $[0, \pi]$ de grafiği çizip bulunan eğrinin $0x$– eksenine göre simetriğini almak yetecektir. Şimdi bazı özel noktalarda fonksiyonun alacağı değerleri bulalım.

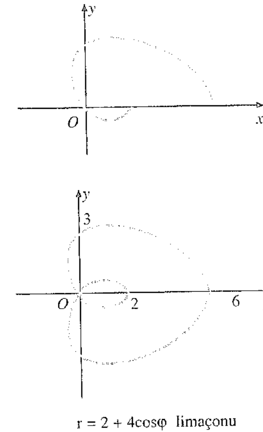
$f(0) = 5$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$, $f(\pi) = -2$

dır. Daha birçok noktada fonksiyon değerleri bulunabilir. Fakat çizim için bu noktalar yeterlidir.

$r' = -4\sin\varphi$ olur. Her $\varphi \in [0, \pi]$ için $r' \leq 0$ olacağından r azalandır.

φ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
r'	0	−		−		−		−	0
r	6	↘	4	↘	2	↘	0	↘	−2

Bu tabloya göre çizim yapılırsa soldaki eğri parçası elde edilir. Bu eğri parçası ile bunun $0x$– eksenine göre simetriği çizimi istenen eğriyi oluşturacağından

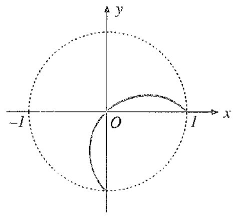


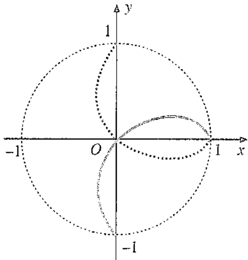
$r = 2 + 4\cos\varphi$ limaçonu

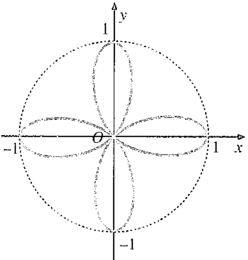
$r = 2 + 4\cos\varphi$ eğrisi yandaki gibi olacaktır. Bu eğriye [illegible] adı verilir.

ÖRNEK : $r = \cos 2\varphi$ eğrisinin grafiğini çiziniz.

Çözüm : Fonksiyon her yerde tanımlıdır. Fonksiyonun periyodu π olduğundan, inceleme π uzunluğundaki bir aralıkta yapılmalıdır. Örneğin $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ de çizim yapılabilir.







4 – yapraklı gül

$f(-\varphi) = f(\varphi)$ olduğundan eğri kutup eksenine göre simetriktir. Şu halde $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de çizim yapmak yeterdir. Bu aralıkta eğri çizildikten sonra kutup eksenine göre simetri alınmalıdır.

$r' = -2\sin 2\varphi$ dir. $0 \le \varphi < \frac{\pi}{2}$ için $0 \le 2\varphi \le \pi$ ve dolayısıyla $r' < 0$ dır.

φ	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
r'	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0
r	1	↘	$\frac{1}{2}$	↘	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↘	-1

Bu tabloya göre eğri çizilirse yandaki grafik elde edilir. Bunun $0x$– eksenine göre simetriği alınır.

$$f\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2\varphi + \pi) = -\cos 2\varphi = -f(\varphi)$$

olduğundan bulunan eğriyi negatif yönde $\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ radyan döndürelim. Bu döndürme işlemine, eğri kendi üzerine kapanıncaya kadar, devam edilirse yandaki grafik elde edilir.

NOT : $r = a\cos n\varphi$ ve $r = a\sin n\varphi$ eğrileri birer gül eğrisidir. Eğer n tek ise eğri n– yapraklı bir gül, n çift ise $2n$– yapraklı bir güldür.

PROBLEMLER

1. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin grafiklerini çiziniz.

a) $r = 2\sin\theta$ (çember)

b) $r = 2\cos\theta$ (çember)

c) $r = 2\sin\theta + 2\cos\theta$ (çember)

d) $r = 1 + \cos\varphi$ (kardiyoid)

e) $r = 2(1 - \cos\varphi)$ (kardiyoid)

f) $r = 4(1 - \sin\varphi)$ (kardiyoid)

g) $r = 4 + 2\cos\varphi$ (limaçon)

h) $r = 4\sin 2\varphi$ (lemniskat)

ı) $r = 4\cos 2\varphi$ (lemniskat)

i) $r = 2\sin 2\varphi$ (4– yapraklı gül)

j) $r = \cos 3\varphi$ (3– yapraklı gül)

k) $r = \sin 3\varphi$ (3– yapraklı gül)

l) $r = 2\varphi$ (Arşimet spirali)

m) $r^2 = 4\cos\varphi$ (8– şekli)

n) $r^2 = 4\sin\varphi$ (8– şekli)

o) $r = \sin\frac{\varphi}{2}$

2. Aşağıdaki eğrilerin kesim noktalarını bulunuz.

a) $r = \sin\varphi$, $r = 1 - \sin\varphi$

b) $r = 2$, $r = \cos\varphi$

c) $r = \sin\varphi$, $r = \cos 2\varphi$

ç) $r = \sin\varphi$, $r^2 = 3\cos^2\varphi$

d) $r = 1 + \cos\varphi$, $r = 1 - \sin\varphi$

e) $r = 1 - \cos\varphi$, $r^2 = 4\cos\varphi$

f) $r^2 = 4\sin\varphi$, $r^2 = 4\cos\varphi$

g) $r = 1 + \cos\varphi$, $r = 1 - \cos\varphi$

ı) $r = 1 - \sin\varphi$, $r^2 = 4\sin\varphi$

i) $r^2 = \sqrt{2}\sin\theta$, $r^2 = \sqrt{2}\cos\varphi$

j) $r = 1$, $r = 2\sin 2\varphi$

k) $r = 1$, $r^2 = 2\sin 2\varphi$

3. Aşağıdaki eğrilerin grafiğini çiziniz.

a) $r = \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$

b) $r = \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $r = 1 + \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$

ç) $r = 4\sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{3}\right)$

d) $r^2 = 4\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$

4. Aşağıdaki eğrilere kutupta (orijinde) teğet olan doğruların denklemini yazınız.

a) $r = 4\cos 2\varphi$ b) $r = \sin 3\varphi$

c) $r^2 = \cos 2\varphi$ ç) $r = 1 - \cos\varphi$

5. Aşağıdaki eğri çiftlerinin kesim noktalarındaki teğetlerinin denklemini bulunuz. Bu teğetlerin oluşturdukları açıların ölçülerini bulunuz.

a) $r = 2(1 - \cos\varphi)$, $r = 6\cos\varphi$

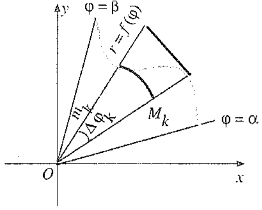
b) $r = \sin\varphi$, $r = \cos 2\varphi$

c) $r = \sin\varphi$, $r = 1 - \sin\varphi$

ç) $r = \sin\varphi$, $r = \cos 2\varphi$

6. $r = 2(1 - \cos\varphi)$ kardiyoidine $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ noktasında çizilen teğet kutup ekseniyle kaç derecelik açı yapar?

2.5 KUTUPSAL KOORDİNATLARDA ALAN HESABI



f bir sürekli fonksiyon olmak üzere, $r = f(\varphi)$ eğrisi ile $\varphi = \alpha$ ve $\varphi = \beta$ doğruları arasında kalan bölgenin A alanını bulalım.

$[\alpha, \beta]$ aralığının $P = \{\alpha = \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n = \beta\}$ parçalanmasını gözönüne alalım.

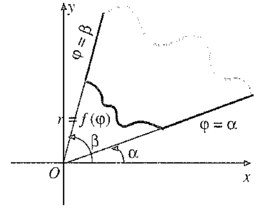
$$m_k = \min \{f(\varphi) : \varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]\}$$

ve

$$M_k = \text{maks} \{f(\varphi) : \varphi \in [\varphi_{k-1}, \varphi_k]\}$$

olsun. m_k ve M_k yarıçaplı daire dilimlerinin alanları, sırasıyla, $\frac{1}{2} m_k^2 \,\Delta\varphi_k$ ve $\frac{1}{2} M_k^2 \,\Delta\varphi_k$ dır. Dolayısıyla

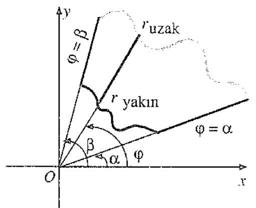
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} m_k^2 \,\Delta\varphi_k \le A \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} M_k^2 \,\Delta\varphi_k$$



yazılabilir. f sürekli olduğundan integrallenebilirdir. Dolayısıyla alt ve üst toplamların $\|P\| \to 0$ için limiti fonksiyonun integraline eşittir. Şu halde

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2\, d\varphi$$

olur.



Alanı istenen bölge, $r = f(\varphi)$, $r = g(\varphi)$ eğrileri ile $\varphi = \alpha$ ve $\varphi = \beta$ doğruları tarafından sınırlanan bölge ise $\alpha \le \varphi \le \beta$ için $f(\varphi) \le g(\varphi)$ ise, bu bölgenin alanı

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} g^2(\varphi)\, d\varphi - \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)\, d\varphi$$

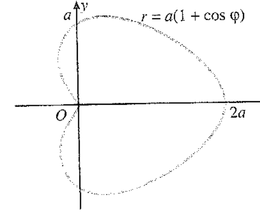
farkına eşit olur. Buradan

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left[g^2(\varphi) - f^2(\varphi)\right] d\varphi$$

bulunur. $r = g(\varphi)$ eğrisi O kutup noktasından $r = f(\varphi)$ den daha uzakta bulunduğundan yukarıdaki formül

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \left[(r_{uzak})^2 - (r_{yakın})^2\right] d\varphi$$

biçiminde yazılabilir.



ÖRNEK : $r = a(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm : Kardiyoidin grafiği yanda verilmiştir.

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\left(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right) d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left[1 + 2\cos\varphi + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)\right] d\varphi$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}\varphi + 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right]\Big|_0^{2\pi}$$

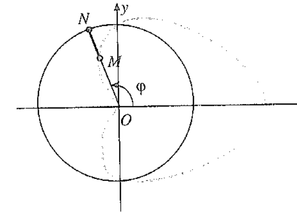
$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}2\pi + 0 + 0\right] = \frac{3}{2}\pi a^2$$

birimkare olur.

NOT : Kardiyoid kutup eksenine göre simetrik olduğundan sözkonusu alan

$$A = 2\,\frac{1}{2}\int_0^{\pi} r^2\, d\varphi = \int_0^{\pi} r^2\, d\varphi$$

biçiminde de hesaplanabilir.



ÖRNEK : $r = 2$ çemberinin içinde, $r = 2\,(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

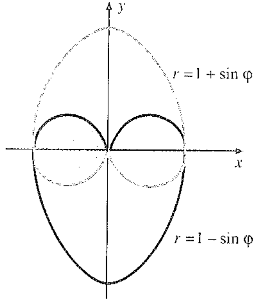
Çözüm : O kutup noktasından geçen ve sözkonusu bölgeden geçen ışın gözönüne alındığında, ışının eğrileri kestiği M noktası O kutbuna daha yakındır. O halde $r_{yakın} = 2(1 + \cos\varphi)$, $r_{uzak} = 2$ dir. Diğer taraftan $[MN]$ doğru parçasının, alanı istenen bölgeyi taraması için φ nin $\frac{\pi}{2}$ den $\frac{3\pi}{2}$ ye kadar değişmesi gerekir. Buna göre,

$$A = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[2^2 - 2^2(1 + \cos\varphi)^2\right] d\varphi = -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left[+2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right] d\varphi$$

$$= -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[2\cos\varphi + \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)\right] d\varphi$$

$$= -2\left(2\sin\varphi + \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = 8 - \pi$$

br^2 olur.



ÖRNEK : $r = 1 + \sin\varphi$ ve $r = 1 - \sin\varphi$ eğrilerinin iç bölgelerinin ortak noktalarından oluşan bölgenin alanını bulunuz.

Çözüm : Sözkonusu alan yandaki şekilde gösterilmiştir. Taralı alan 4 tane simetrik alandan oluştuğundan, bunların birinin alanını bulup 4 ile çarpmak yeterdir. Birinci bölgedeki alanı bulalım.

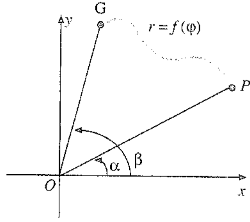
$$A = 4.\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin\varphi)^2\,d\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\sin\varphi + \sin^2\varphi)\,d\varphi$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[1 - 2\sin\varphi + \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\right] d\varphi$$

$$= 2\left(\frac{3}{2}\varphi + 2\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{2} - 2$$

br^2 olur.

4.4 KUTUPSAL KOORDİNATLARDA YAY UZUNLUĞU HESABI



Kartezyen koordinatlarda $y = f(x)$ denklemi ile verilen eğrinin yay diferensiyelinin

$$d\ell = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$

olduğunu biliyoruz.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}$$

olduğundan

$$d\ell = \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2}\,d\varphi$$

dir. Diğer taraftan

$$\frac{dx}{d\varphi} = r'\cos\varphi - r\sin\varphi\,,\quad \frac{dy}{d\varphi} = r'\sin\varphi + r\cos\varphi \quad \text{olduğundan}$$

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = r^2 + (r')^2$$

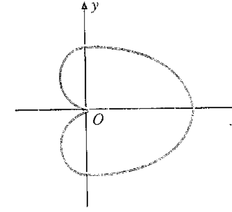
dir. Buna göre, yay diferensiyeli

$$d\ell = \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi$$

olur. O halde eğri üzerinde $P(r_1, \alpha)$, $Q(r_2, \beta)$ noktalarını birleştiren yayın uzunluğu

$$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi$$

birimdir.



ÖRNEK : $r = a(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidinin çevre uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm : Önce $r^2 + (r')^2$ ifadesini hesaplayalım.

$$r^2 + (r')^2 = a^2(1+\cos\varphi)^2 + (-a\sin\varphi)^2 = 2a^2(1+\cos\varphi)$$

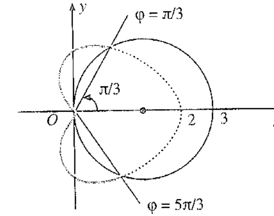
$$= 2a^2\left(1 + 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1\right) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2} = \left(2a\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2$$

olduğundan

$$\ell = \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(2a\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}\,d\varphi = 2\int_0^{\pi} 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi$$

$$= 4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4a\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = 8a$$

birimdir.



ÖRNEK : $r = 1 + \cos\varphi$ kardiyoidinin $r = 3\cos\varphi$ çemberinin dışında kalan parçasının uzunluğunu hesaplayınız.

Çözüm :

$$r^2 + (r')^2 = (1+\cos\varphi)^2 + (-\sin\varphi)^2 = 2 + 2\cos\varphi$$

$$= 2(1+\cos\varphi) = 2(1 + 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1)$$

$$= \left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2$$

dir. Şimdi iki eğrinin kesim noktasını bulalım.

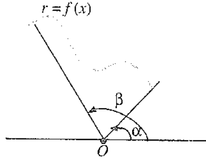
$$1 + \cos\varphi = 3\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{3} \text{ ve } \varphi_2 = \frac{5\pi}{3}$$

olur. Buna göre,

$$\ell = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}}\sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi = 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\sqrt{\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}\,d\varphi$$

$$= 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 8\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = 4 \text{ br}$$

olur.



Eğer f fonksiyonu sürekli türeve sahip bir fonksiyon ve φ, α dan β ye kadar değiştiğinde $P(r, \varphi)$ noktası $r = f(\varphi)$ eğrisini oluşturursa, bu eğrinin $0x-$ ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |r \sin\varphi| \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi \ ,$$

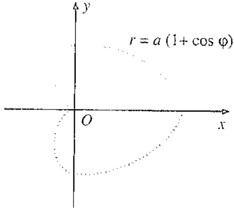
eğrinin $0y-$ ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |r \cos\varphi| \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi$$

olur. Bu formülleri bulmak için

$$S = 2\pi \int |y|\, d\ell \qquad \text{ve} \qquad S = 2\pi \int |x|\, d\ell$$

formüllerini kutupsal koordinatlara göre yazmak yeterdir.



ÖRNEK : $r = a(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidinin üst yarısının $0x-$ ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan yüzeyin alanını bulunuz.

Çözüm :

$$r^2 + (r')^2 = a^2(1 + \cos\varphi)^2 + (-a\sin\varphi)^2 = a^2(2 + 2\cos\varphi)$$

$$= 2a^2\left(1 + 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1\right) = \left(2a\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2$$

olduğundan

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} |r\sin\varphi|\, 2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi$$

$$= 4a^2\pi \int_0^{\pi} (1 + \cos\varphi)\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

$$= 4a^2\pi \int_0^{\pi} \left(1 + 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1\right) 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

$$= 16a^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$$

$$= -32a^2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\frac{\varphi}{2}\left(-\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$

$$= -32a^2\pi \left.\frac{\cos^5\frac{\varphi}{2}}{5}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{5}\pi a^2$$

br^2 bulunur.

1. Aşağıda denklemleri verilen eğriler tarafından sınırlanan bölgelerin alanlarını bulunuz.

   a) $r = \cos 2\varphi$ (4 yapraklı gül)

   b) $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ (lemniskat)

   c) $r^2 = 4\sin 2\varphi$ (lemniskat)

   ç) $r = 4 + 2\cos\varphi$ (limaçon)

   d) $r = a\sin 3\varphi$ (üç yapraklı gül)

   e) $r = 3 + 2\sin\varphi$ (limaçon)

2. $r = 1$ çemberinin dışında, $r = 2\sin\varphi$ çemberinin içinde kalan bölgenin alanını bulunuz.

3. $r = \cos\varphi$ ve $r = \sqrt{3}\sin\varphi$ çemberlerinin her ikisinin de içinde kalan bölgenin alanını bulunuz.

4. $r = 3 + 2\cos\varphi$ limaçonunun içinde $r = 4$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

5. $r^2 = 2\cos^2\varphi$ lemniskatının içinde $r = 1$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

6. $r^2 = \cos 2\varphi$ ve $r^2 = \sin 2\varphi$ lemniskatlarının her ikisinin de içinde kalan bölgenin alanını hesaplayınız.

7. $r^2 = 4\cos\varphi$ (8 şekli) eğrisinin içinde $r = 1 - \cos\varphi$ kardiyodunun dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

8. $r = \sin\varphi + \cos\varphi$ çemberi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

9. $r = 2(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidinin içinde, $r = 2(1 - \cos\varphi)$ kardiyoidinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

10. Kutupsal koordinatlara geçerek $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

11. Kutup açılarının değişim aralığı karşılarında yazılı olan, aşağıdaki eğrilerin uzunluklarını hesaplayınız.

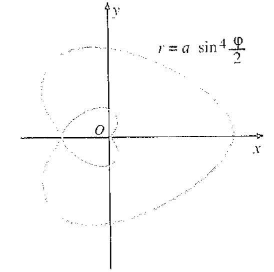
   a) $r = 4\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$

   b) $r = \sin^3\frac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le 3\pi$

   c) $r = \varphi^2$, $0 \le \varphi \le \sqrt{5}$

   d) $r = a\sin^2\frac{\varphi}{2}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

   e) $r = \sqrt{1 + \sin 2\varphi}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

12. 

Yukarıda grafiği verilen $r = a\sin^4\frac{\varphi}{2}$ eğrisinin uzunluğunu hesaplayınız.

13. $r = 1 - \cos\varphi$ kardiyoidinin ikinci bölgede bulunan parçasının $0x$–ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını hesaplayınız.

14. $r = a(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidinin üst yarısı $0x-$ ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel cismin hacmini bulunuz.

BÖLÜM PROBLEMLERİ

1. Aşağıda denklemleri verilen eğrilerin kesim noktalarını bulunuz.

   a) $r = a, \quad r = a(1 - \sin\varphi)$

   b) $r = a\sec\varphi \,, \quad r = 2a\sin\varphi$

   c) $r = a(1 + \cos 2\varphi), \quad r = a\cos 2\varphi$

2. $r = \dfrac{1}{1 - \cos\varphi} \,, \quad r = \dfrac{3}{1 + \cos\varphi}$

   eğrilerinin kesim noktalarını bulunuz. Eğrilerin kesim noktalarındaki teğetlerinin oluşturduğu açıların ölçülerini hesaplayınız.

3. Bilindiği gibi, iki eğri arasındaki açı, onların kesim noktalarındaki teğetleri arasındaki açıdır. Buna göre $r = 3\sec\varphi$ doğrusuyla $r = 4(1 + \cos\varphi)$ kardiyoidi arasındaki açının ölçüsünü bulunuz.

4. $r = 1 \,, \; r = 2\cos\varphi \,, \; r = 2\sin\varphi$

   çemberlerinin her üçü tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

5. $r = \sqrt{|\cos\varphi|}$ eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

6. $r = 1 + 2\sin\varphi$ limaçonunun iç ilmeği tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

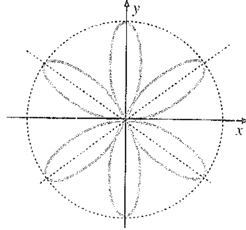
7. $r = 2a\cos 2\varphi$ gülünün içinde

   $r = \sqrt{2}\,a$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

8. $r^2 = 4\cos 2\varphi$ lemniskatının içinde $r = \sqrt{2}$ çemberinin dışında kalan bölgenin alanını bulunuz.

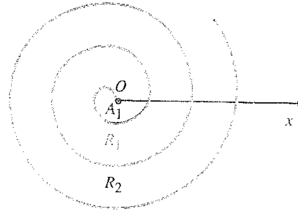
9. $r^2 = \sin 2\varphi$ lemniskatının $0y$– eksenini sağında kalan parçası $0y$– ekseni etrafında döndürülüyor. Meydana gelen dönel yüzeyin alanını bulunuz.

10.



Yukarıda grafiği verilen $r^2 = 2\sin 3\varphi$ (6– yapraklı gül) eğrisi tarafından sınırlanan bölgenin alanını bulunuz.

11.



Yukarıda grafiği verilen ve arşimet spirali denilen eğrinin denklemi, a bir sabit olmak üzere, $r = a\varphi$ dir. Spiralin n– sarmalının ($2(n-1)\pi \le \varphi \le 2n\pi$ için)

$(n - 1)$. sarmalı arasındaki alan

$$R_n = A_n - A_{n-1}$$

olsun. Aşağıdaki bağıntıların doğruluğunu gösteriniz.

a) $A_1 = \dfrac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$ b) $A_2 = \dfrac{7}{12}\pi(4\pi a^2)^2$

c) $R_2 = 6A_1$ d) $R_{n+1} = n\,R_2$ ($n \ge 2$ için)

12. Denklemi

$$r = \sqrt{\cos 2\varphi} \;, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

olan eğri parçasının $0x$– ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanını bulunuz.

10 DİZİLER VE SERİLER

10.1 DİZİLER

TANIM

Tanım kümesi pozitif tamsayılar kümesi olan her fonksiyona bir sonsuz dizi veya kısaca, dizi denir. Fonksiyonun değer kümesi R reel sayılar kümesi ise diziye bir reel terimli dizi adı verilir.

Reel değerli bir f fonksiyonu için

$$f(1) = a_1 \,, \; f(2) = a_2 \,, \ldots \,, f(n) = a_n \,, \ldots$$

ise $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ reel sayılarına dizinin birinci, ikinci, ..., n– inci, ... terimleri denir. n doğal sayısına karşılık gelen a_n sayısına dizinin genel terimi de denir. Genel terimi a_n olan dizi kısaca, (a_n) ile gösterilir. Örneğin $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ dizisi denilince, terimleri $1, \dfrac{1}{2^2}, \dfrac{1}{3^2}, \ldots$ olan dizi anlaşılır.

Şimdi genel terimleri çeşitli şekillerde verilen dizilerin bazı terimlerinin nasıl bulunacağını görelim.

ÖRNEK : $\left(\dfrac{n+1}{2n+3}\right)$ dizisinin 10. terimini bulunuz.

Çözüm : 10. terim 10 sayısına karşılık gelen reel sayı olacağından

$$a_{10} = \frac{10 + 1}{2.10 + 3} = \frac{11}{23}$$

olur.

ÖRNEK : $a_1 = 1$ ve her $n \geq 1$ için

$$a_{n+1} = na_n$$

olduğuna göre, a_n ve a_{100} terimlerini bulunuz.

Çözüm : Yukarıdaki eşitlikte n yerine 1 den $n - 1$'e kadar değerler verilirse

$$a_2 = 1a_1$$

$$a_3 = 2a_2$$

$$a_4 = 3a_3$$

....

$$a_{n-1} = (n-2)a_{n-2}$$

$$a_n = (n-1)a_{n-1}$$

bulunur. Bunlar taraf tarafa çarpılırsa

$a_2\, a_3\, a_4 \ldots a_{n-1}\, a_n = 1.2.3 \ldots (n-1)\, a_1\, a_2\, a_3 \ldots a_{n-1}$ eşitliği elde edilir.

Her iki taraf $a_2\, a_3 \ldots a_{n-1}$ ile bölünürse

$$a_n = (n-1)!\, a_1 = (n-1)!\,.\,1 = (n-1)!$$

bulunur. n yerine 100 yazılırsa $a_{100} = 99!$ olur.

> **TANIM**
>
> $A_p = \{1, 2, 3, \ldots, p\}$ olmak üzere, tanım kümesi A_p olan her fonksiyona bir p terimli sonlu dizi denir.

ÖRNEK : $A_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ olsun.

$$f : A_5 \to R,\quad f(n) = 3n + 1$$

sonlu dizisinin terimlerini bulunuz.

Çözüm : $f(1) = 4$, $f(2) = 7$, $f(3) = 10$, $f(4) = 13$, $f(5) = 16$ olduğundan dizinin terimleri 4, 7, 10, 13, 16 sayılarıdır.

> **TANIM**
>
> Her $n \in N$ için
>
> $$a_{n+1} - a_n = d$$
>
> olacak biçimde bir d reel sayısı varsa, (a_n) dizisine bir aritmetik dizi, d sayısına da bu dizinin ortak farkı adı verilir.

ÖRNEK : $(5n + 2)$ dizisinin bir aritmetik dizi olduğunu gösterip ortak farkını bulunuz.

Çözüm :

$$a_{n+1} - a_n = 5(n+1) + 2 - (5n+2) = 5$$

olduğundan verilen dizi, ortak farkı 5 olan bir aritmetik dizidir.

NOT : $(cn + d)$ biçimindeki diziler ortak farkı c olan birer aritmetik dizidir.

Şimdi bir aritmetik dizinin ilk n teriminin toplamını bulalım.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ olsun.

$$S_n = (c.1 + d) + (c.2 + d) + \ldots + (cn + d)$$

$$= c(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + nd = c.\frac{n(n+1)}{2} + nd$$

$$= \frac{n}{2}[(n+1)c + 2d] = \frac{n}{2}[nc + d + c + d]$$

bulunur. O halde

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

olur.

ÖRNEK : $(a_n) = \left(\frac{n}{3} + 2\right)$ dizisinin ilk 20 teriminin toplamını bulunuz.

Çözüm : $S_{20} = \frac{20}{2}(a_1 + a_{20}) = 10\left(\frac{7}{3} + \frac{26}{3}\right) = 110$ olur.

> **TANIM**
>
> Her n pozitif tamsayısı için
>
> $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$
>
> olacak şekilde bir r reel sayısı varsa (a_n) dizisine bir geometrik dizi, r sayısına da bu dizinin ortak çarpanı veya ortak oranı denir.

ÖRNEK : (3.5^n) dizisinin bir geometrik dizi olduğunu gösterip ortak çarpanını bulunuz.

Çözüm : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3.5^{n+1}}{3.5^n} = 5$

olduğundan verilen dizi ortak çarpanı 5 olan bir geometrik dizidir.

Bir geometrik dizinin ilk n teriminin toplamını bulmak için, önce

$$T_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n$$

toplamını hesaplayalım.

$$T_n = 1 + r + r^2 + \ldots + r^n$$

$$rT_n = r + r^2 + r^3 + \ldots + r^n + r^{n+1}$$

ifadeleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$T_n - r\,T_n = 1 - r^{n+1}$$

bulunur. Burada T_n çekilirse

$$T_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

eşitliği elde edilir. O halde $r \neq 1$ için

$$1 + r + r^2 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

olur.

(a_n), ortak oranı r olan bir geometrik dizi olsun.

$a_{n+1} = ra_n$ eşitliğinde, n yerine 1 den $n - 1$'e kadar değerler verilirse

$$a_2 = ra_1$$

$$a_3 = ra_2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$a_{n-1} = ra_{n-2}$$

$$a_n = ra_{n-1}$$

bağıntıları elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa çarpılır ve her iki taraf $a_2\, a_3 \ldots a_{n-1}$ ile sadeleştirilirse, geometrik dizinin genel terimi olan

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

bulunur. Şimdi bu dizinin ilk n teriminin toplamını bulalım. $G_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n$ denirse

$$G_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{n-1}$$

$$= a_1 (1 + r + r^2 + \ldots + r^{n-1}) = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

bulunur. Şu halde ilk terimi a_1, ortak çarpanı r olan bir geometrik dizinin toplamı

$$G_n = a_1 \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

olur.

TANIM

Her n pozitif tamsayısı için

$a_n < a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ artandır

$a_n > a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ azalandır

$a_n \leq a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ azalmayandır

$a_n \geq a_{n+1} \Leftrightarrow (a_n)$ artmayandır

Artan veya azalan dizilere monoton diziler denir.

ÖRNEK : $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ dizisinin azalan olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n(n+1)} < 0 \Rightarrow$$

$$a_{n+1} < a_n \Rightarrow (a_n) \text{ azalandır.}$$

NOT : $a_n > 0$ olduğunda, her n pozitif tamsayısı için, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ olduğunda (a_n) dizisinin artan, $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ olduğunda (a_n) dizinin azalan olacağı açıktır.

ÖRNEK : $\left(\frac{2^n}{(n+1)!}\right)$ dizisinin monotonluk durumunu inceleyiniz.

Çözüm :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+2)!}}{\dfrac{2^n}{(n+1)!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{2^n} = \frac{2}{n+2} < 1$$

olduğundan (a_n) azalandır.

TANIM

Her n doğal sayısı için $s_n \leq M$ olacak şekilde bir M reel sayısı varsa (s_n) dizisine üstten sınırlıdır denir, M sayısına da bu dizinin bir üst sınırı adı verilir.

Her n doğal sayısı için $s_n \geq m$ olacak şekilde bir m reel sayısı varsa bu diziye alttan sınırlıdır denir, m sayısına da bu dizinin bir alt sınırı adı verilir.

Hem alttan hem de üstten sınırlı olan dizilere kısaca, sınırlı diziler denir.

ÖRNEK : $\left((-1)^n \dfrac{n}{n+1}\right)$ dizisinin sınırlılık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : Her $n \in N$ için

$$\left|(-1)^n \frac{n}{n+1}\right| = \frac{n}{n+1} < 1$$

olduğundan

$$-1 < (-1)^n \frac{n}{n+1} < 1$$

dir. Şu halde dizi hem alttan hem de üstten sınırlıdır. Dolayısıyla sınırlıdır.

10.2 DİZİLERİN YAKINSAKLIĞI

Bilindiği gibi

$$K = \{x \in R : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

aralığına a nın ε– komşuluğu adı verilir. Örneğin 2 sayısının $\dfrac{1}{100}$ – komşuluğu $\left(2 - \dfrac{1}{100}, 2 + \dfrac{1}{100}\right) = \left(\dfrac{199}{100}, \dfrac{201}{100}\right)$ aralığıdır.

TANIM

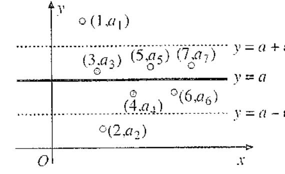
(a_n) bir reel terimli dizi ve $a \in R$ olsun.

a sayısının herbir komşuluğu, (a_n) dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer tüm terimlerini içeriyorsa, (a_n) dizisi a sayısına yakınsıyor veya (a_n) dizisinin limiti a dır denir,

$$\lim a_n = a \quad \text{veya} \quad (a_n) \to a$$

biçiminde gösterilir.

Yakınsak olmayan dizilere ıraksak diziler denir.



(a_n) dizisi a sayısına yakınsak olsun. a noktasının bir ε- komşuluğu verildiğinde, sonlu sayıdaki terimler hariç diğer tüm terimler $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aralığında bulunacağından, sonlu sayıdaki n ler hariç diğer tüm n ler için (n, a_n) noktaları $y = a - \varepsilon$, $y = a + \varepsilon$ doğruları arasında bulunur.

ÖRNEK : $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ dizisinin sıfıra yakınsadığını gösteriniz. Dizinin kaç terimi sıfırın $\dfrac{1}{100}$ – komşuluğunun dışındadır.

Çözüm : $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ bağıntısını sağlayan bir n_0 sayısı seçelim.

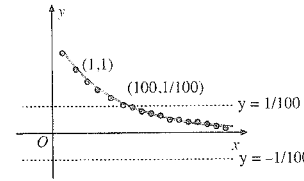
Her $n > n_0$ için

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

olur. Bu, n_0 tane terim hariç diğer tüm terimlerin $-\varepsilon < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ bağıntısını sağladığını, yani $(-\varepsilon, \varepsilon)$ aralığında bulunduklarını gösterir. Şu halde $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ dizisi sıfır sayısına yakınsar. Buna göre

$$\lim \frac{1}{n} = 0 \quad \text{veya} \quad \left(\frac{1}{n}\right) \to 0$$

yazılabilir.



$\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ alınırsa

$$\left|\frac{1}{n}\right| \geq \varepsilon = \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{n} \geq \frac{1}{100} \Rightarrow n \leq 100$$

bulunur. Şu halde ilk 100 terim sıfırın $\dfrac{1}{100}$ – komşuluğu dışındadır.

Diziler, özel fonksiyonlar olduklarından, fonksiyonlar için geçerli olan tüm limit alma kuralları diziler için de geçerlidir. Bir dizinin limiti hesaplanırken o dizide n yerine x konup $x \to \infty$ için limit alınabilir. Buna göre,

$$\lim_{n \to \infty} f(n) = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

yazılabilir. Bu nedenle aşağıdaki teoremin ispatı açıktır.

TEOREM 10.1:

$\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ ve $\lambda \in R$ olsun.

(1) $\lim (a_n + b_n) = a + b$,

(2) $\lim (a_n b_n) = a.b$,

(3) $b_n \neq 0$ ve $b \neq 0$ için $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$,

(4) $\lim (\lambda a_n) = \lambda a$

ÖRNEK : $\left(\frac{2n}{n+1}\right)$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm:

Birinci yol:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n}{n+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

olur.

İkinci yol:

Pay ve payda n ile bölünürse

$$\frac{2n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}} \to \frac{2}{1+0} = 2$$

bulunur.

Şimdi bazı limitleri hesaplamada yardımcı olan bazı teoremler verelim. Bunların birçoğunun ispatı fonksiyonların limitlerinden yararlanılarak yapılabilir. Burada bu ispatlara girmeyeceğiz.

TEOREM 10.2:

$\lim a_n = a$ ise

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

dır.

ÖRNEK: $\lim \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1}\right)$ limitini hesaplayınız.

Çözüm: $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ olduğundan verilen limitin değeri de 1 dir.

TEOREM 10.3:

(a_n) pozitif terimli bir dizi olsun.

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = r$$

dir.

ÖRNEK: $(\sqrt[n]{n})$ dizisinin limitini hesaplayınız.

Çözüm: $a_n = n$ alınırsa

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n+1}{n} = 1$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1$$

olur.

TEOREM 10.4:

Sonlu sayıdaki terimler hariç diğer tüm terimler için

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

ve $\lim a_n = \lim c_n = \ell$ ise $\lim b_n = \ell$ dir.

Bu özelliğe sandviç özelliği denir.

ÖRNEK : $\left(\frac{\cos n}{n}\right)$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm : $|\cos n| \leq 1$ olduğundan

$$\left|\frac{\cos n}{n}\right| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

dir.

Diğer taraftan $\lim\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim \frac{1}{n} = 0$ olduğundan

$$\lim \frac{\cos n}{n} = 0 \text{ dır.}$$

ÖRNEK : $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (1^∞ belirsizliği)

dır. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ denirse $\ln y = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

bulunur.

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{1}{1+y}}{1} = 1$$

olacağından

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

bulunur.

TEOREM 10.5:
Monoton bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır.

ÖRNEK : Genel terimi

$$a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

olan dizinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm :

$$a_{n+1}-a_n = \frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} > 0$$

olduğundan (a_n) monoton artandır.

$$a_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} < \underbrace{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+1}}_{n \text{ tane}} = n.\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

olduğundan (a_n) üstten sınırlıdır. $a_1 = \frac{1}{2}$ dir. Dolayısıyla, her $n \in N$ için

$$\frac{1}{2} \le a_n < 1$$

olacaktır. O halde (a_n) yakınsaktır.

TEOREM 10.6:
(a_n) sınırlı ve $(b_n) \to 0$ ise $(a_nb_n) \to 0$ dır.

ÖRNEK : $\left((-1)^n\frac{n}{n^2+1}\right)$ dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm :

$a_n = (-1)^n$; $b_n = \frac{n}{n^2+1}$ denirse (a_n) sınırlı,

$\lim b_n = \lim\frac{n}{n^2+1} = 0$ olur.

Yukarıdaki özellikten $\lim a_nb_n = \lim(-1)^n\frac{n}{n^2+1} = 0$ olur.

TEOREM 10.7:
$|r| < 1$ ise $\lim r^n = 0$ dır.

ÖRNEK : Genel terimi $a_n = (-1)^n\frac{2^n}{7^n}$ olan dizinin limitini bulunuz.

Çözüm : $r = -\frac{2}{7}$ alınırsa $a_n = r^n$ olur. $|r| = \left|-\frac{2}{7}\right| = \frac{2}{7} < 1$ olduğundan

$\lim r^n = 0$ dır. Dolayısıyla $\lim a_n = 0$ dır.

TANIM
(k_n) pozitif tamsayıların artan bir dizisi olmak üzere, (a_{k_n}) dizisine (a_n) dizisinin bir alt dizisi denir.

ÖRNEK : $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisinin bazı alt dizilerini bulunuz.

Çözüm :

$k_n = 2n$ alınırsa $\left(\frac{1}{2n}\right) = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\cdots,\frac{1}{2n},\cdots\right)$ dizisi,

$k_n = 2n-1$ alınırsa $\left(\frac{1}{2n-1}\right) = \left(1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\cdots,\frac{1}{2n-1},\cdots\right)$ dizisi,

$k_n = n^2$ alınırsa $\left(\frac{1}{n^2}\right) = \left(1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\cdots,\frac{1}{n^2},\cdots\right)$ dizisi,

elde edilir.

Daha bunlar gibi sonsuz çoklukta alt dizi yazılabilir.

Örneklerden de görüldüğü gibi, alt dizinin herbir terimi aynı zamanda esas dizinin de bir terimidir.

$\varepsilon > 0$ olsun. (a_n) dizisi bir a sayısına yakınsak olduğunda, bu dizinin sonlu sayıdaki terimi hariç diğer tüm terimleri a nın $\varepsilon-$ komşuluğunda bulunur. Bu durumda $\left(a_{k_n}\right)$ alt dizisinin de sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer tüm terimleri a nın $\varepsilon-$ komşuluğunda bulunur. Dolayısıyla $\left(a_{k_n}\right)$ dizisi de a sayısına yakınsar. Böylece şu teorem ispatlanmış oldu.

TEOREM 10.8:
$(a_n) \to a$ ise $\left(a_{k_n}\right) \to a$ dır.

ÖRNEK : $a_1 = \sqrt{2}$, $n \geq 1$ için

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

bağıntısını sağlayan (a_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösterip limitini hesaplayınız.

Çözüm : Tüm terimler pozitiftir. Ayrıca

$$a_1 = \sqrt{2} < 2\,,\quad a_2 = \sqrt{2 + a_1} < \sqrt{2+2} = 2\,,\quad a_3 = \sqrt{2 + a_2} < \sqrt{2+2} = 2\,, \ldots$$

olacağından dizinin tüm terimleri 2 den küçüktür.

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2 + a_n} - a_n = \frac{2 + a_n - a_n^2}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} = \frac{(2 - a_n)(1 + a_n)}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} > 0$$

olacağından $a_{n+1} > a_n$ dir. Yani dizi artandır.

Artan ve sınırlı her dizi yakınsak olduğundan (a_n) yakınsaktır. $\lim a_n = a$ olsun. Bu takdirde (a_{n+1}) alt dizisinin de limiti a olur.

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$$

eşitliğinde her iki tarafın limiti alınırsa

$$a = \sqrt{2 + a} \;\Rightarrow\; a^2 = 2 + a \;\Rightarrow\; a^2 - a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 2 \text{ veya } a = -1$$

bulunur. Dizinin tüm terimleri pozitif olduğundan yakınsayacağı sayı pozitif olabilir. O halde

$$\lim a_n = 2$$

dir.

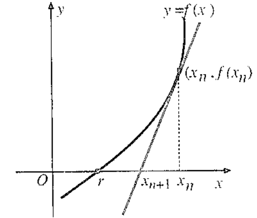
10.3 NEWTON YÖNTEMİ

Newton yöntemi, Nümerik Analiz derslerinde verilen, denklemlerin köklerinin yaklaşık hesabında kullanılan yöntemlerden biridir.

$f(x) = 0$ denkleminin köklerinden biri r ise $y = f(x)$ eğrisinin $0x-$ eksenini kestiği noktalardan birinin apsisi r dir.

Newton yönteminin özü şudur :

Önce bir x_0 başlangıç tahmini yapılır. bu tahmin, fonksiyonun yapısına, aldığı değerlere göre kestirilebilir. Örneğin $f(a) < 0$ ve $f(b) > 0$ ise x_0 olarak a ve b arasındaki herhangi bir nokta alınabilir. x_0 dan yararlanarak r ye daha yakın olan x_1 , x_1 den yararlanarak r ye daha yakın bir x_2 ve böyle devam edilerek $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ noktaları elde edilir. Böylece r ye yakınsayan bir (x_n) dizisi bulunmuş olur. n ne kadar büyük seçilirse x_n , r ye o kadar yakın olur.



Şimdi bu dizinin nasıl bulunacağını görelim.

$y = f(x)$ eğrisinin $(x_n, f(x_n))$ noktasındaki teğetinin eğimi $m = f'(x_n)$ olduğundan

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - 0}{x_n - x_{n+1}}$$

olur. Buradan

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

indirgeme bağıntısı elde edilir.

Bu bağıntıda n yerine $0, 1, 2, \ldots, n$ değerleri verilerek $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}$ terimleri bulunur.

ÖRNEK : $x^3 + x - 1 = 0$ denkleminin kökünü bulunuz.

Çözüm : $f(x) = x^3 + x - 1$ diyelim

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ olduğundan f artandır. Dolayısıyla $f(x) = 0$ denkleminin bir tek kökü vardır. İndirgeme bağıntısı

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} \Rightarrow$$

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + 1}{3x_n^2 + 1}$$

olur.

$f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$ olduğundan $0 < r < 1$ dir.

x_0 olarak bu aralıktaki herhangi bir nokta alınabilir. $x_0 = \frac{1}{2}$ alalım.

Bu durumda

$$x_1 = \frac{2x_0^3 + 1}{3x_0^2 + 1} = \frac{2\frac{1}{3} + 1}{3\frac{1}{4} + 1} = \frac{5}{4} \cong 0,714286$$

$$x_2 = \frac{2\left(\frac{5}{6}\right)^3 + 1}{3\left(\frac{5}{6}\right)^2 + 1} = \frac{233}{336} \cong 0,693452$$

$$x_3 = \frac{2\left(\frac{233}{336}\right)^3 + 1}{3\left(\frac{233}{336}\right)^2 + 1} \cong 0,682433$$

Benzer şekilde işlemler yapılarak

$$x_4 = 0,682307$$

bulunur. Görüldüğü gibi, bu yöntemin uygulanması oldukça kolaydır. Buradaki zorluk işlemlerin çokluğudur. Bir hesap makinası veya bilgisayarla bu işlemler çok kısa süre içinde yapılabilir.

1. Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin ilk beş terimini bulunuz.

a) $\left(\frac{2n-1}{n+1}\right)$ b) $\left(\frac{1}{n^2+1}\right)$

c) $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)$ ç) $\left(\frac{2^n - 1}{2^n + 1}\right)$

d) $\begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & n \text{ tek ise} \\ 1 + \frac{1}{R}, & n \text{ çift ise} \end{cases}$ e) $\left(\frac{11-3n}{n+1}\right)$

2. Aşağıdaki indirgeme bağıntıları yardımıyla tanımlanan (a_n) dizilerinin ilk on terimini bulunuz.

a) $a_1 = 0$, $\forall n \geq 2$ için $a_n = 2a_{n-1} + 3$

b) $a_1 = -1$, $\forall n \geq 2$ için $a_n = 1 - 4a_{n-1}$

c) $a_1 = \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 2$ için $a_n = \frac{2}{a_{n-1}} + 1$

ç) $a_1 = 1$, $\forall n \geq 1$ için $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^n}$

d) $a_1 = 1$, $\forall n \geq 1$ için $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$

e) $a_1 = -2$, $\forall n \geq 1$ için $a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$

f) $a_1 = a_2 = 1$, $\forall n \geq 1$ için $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$

3. (a_n) herhangi bir dizi ve $p \in N^+$ olmak üzere

$$b_n = a_n + (n-2)(n-3)\ldots(n-p)$$

olsun. (a_n) ve (b_n) dizilerinin ilk p terimlerinin eşit olacağını gösteriniz. Buna göre bir dizinin baştan sonlu sayıda terimi verilirse o dizi verilmiş olur mu?

4. $\lim a_n = a$ ise $\lim|a_n| = |a|$ dır, gösteriniz.

5. $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ve $n \geq 1$ için $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ özelliğini sağlayan (F_n) dizisine [illegible] adı verilir. Bu dizinin ilk on terimini yazınız.

(a_n) dizisi verilmiş olsun. (S_n) dizisi

$$S_1 = a_1, \quad \text{her } n \geq 2 \text{ için } S_n = S_{n-1} + a_n$$

biçiminde tanımlanıyor. S_n genel terimini (a_n) dizisinin terimleri cinsinden yazınız.

Öyle bir sınırlı dizi bulunuz ki

a) En büyük terimi olsun fakat en küçük terimi olmasın.

b) En küçük terimi olsun, fakat en büyük terimi olmasın.

c) Ne en küçük ne de en büyük terimi olsun.

d) Hem en küçük, hem de en büyük terimi olsun.

Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin yakınsak olup olmadıklarını araştırınız. Yakınsak olanların limitini bulunuz.

a) $2 + \frac{1}{10^n}$ b) $\frac{n + (-1)^n}{n}$ c) $\frac{1-3n}{1+3n}$

d) $\frac{3n+1}{1+\sqrt{n}}$ e) $\frac{n+3}{n^2+4}$ f) $1 + (-1)^n$

g) $\frac{(-1)^{n+1}}{2n+2}$ h) $\frac{n}{2^n}$ ı) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

i) $\frac{\sin^2 n}{2^n}$ j) $\frac{n!}{2^n . 3^n}$ k) $\frac{(-3)^n}{n!}$

l) $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ m) $\sqrt[n]{n^2}$ n) $\left(1 + \frac{7}{n}\right)^n$

o) $\frac{n!}{n^n}$ ö) $n\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ p) $n \sin\frac{1}{n}$

r) $\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{6}{7}\right)^n}$ s) $\ln\frac{1}{n}$ ş) $\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$

$r \in R$ olsun. Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{r^n}{1 + r^n}$ b) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{r^n}{1 + r^{2n}}$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{r^n}{n!}$ ç) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{r^n}{r^{2n} + r^{2n+1}}$

ilk ve son limitlerde $r \neq -1$ dir.

10. $p > 0$ olsun. $x_1 = 1$ ve $\forall n \geq 1$ için

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{p}{a_n}\right) \quad \text{dir.}$$

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \sqrt{p}$ olacağını gösteriniz.

11. Herhangi bir $c > 0$ için

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\ln(n)}{n^c} = 0$ olacağını gösteriniz.

12. $c > 1$ olsun.

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{c^n} = 0$ olacağını gösteriniz.

13. (F_n), Problem 5 de verilen Fibonnacci dizisi olsun.

$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ olacağını gösteriniz.

14. Öyle ıraksak (a_n), (b_n) dizileri bulunuz ki,

a) $(a_n + b_n)$ yakınsak

b) $(a_n b_n)$ yakınsak

c) $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ yakınsak olsun.

15. Türev yardımıyla aşağıda genel terimleri verilen dizilerin en büyük terimlerini bulunuz.

a) $\sqrt[n]{n}$ b) $\frac{\sqrt{n}}{n + 2500}$ c) $\frac{n^{10}}{2^n}$

16. $c > 0$ olsun.

$\lim \sqrt[n]{c} = 1$

olduğunu gösteriniz.

17. $\lim a_n = a$ ve f fonksiyonu a da sürekli ise

$\lim\limits_{n \to \infty} f(a_n) = f(a)$ olacağını gösteriniz.

18. Aşağıda genel terimleri verilen dizilerin monotonluk durumunu inceleyiniz.

a) $\frac{n}{2n+1}$ b) $\frac{3n+1}{2n-17}$ c) $\frac{3n-5}{n+5}$

19. $(3n^2 - 20n + 19)$ dizisinin en küçük terimini bulunuz.

20. $\left(\frac{3 + 6 + 9 + \cdots 3n}{2 + 4 + 6 + \cdots + 2n}\right)$ dizisinin limitini bulunuz.

21. (a_n) bir geometrik dizi, $a_4 = 5$, $a_7 = 40$ olduğuna göre, dizinin ortak çarpanını ve 10. terimini bulunuz.

22. a ve b iki reel sayı ve $a < b$ olsun. a ile b arasına n tane sayı yerleştirilerek $(n + 2)$ terimli bir geometrik dizi oluşturuluyor. Bu dizinin ortak çarpanının

$$r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

olacağını gösteriniz.

23. Bir geometrik dizinin ardışık üç teriminin toplamı 14, çarpımı 64 tür. Bu terimleri bulunuz.

24. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots}}} = 3$

b) $\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \cdots}}} = 5$

25. Aşağıdaki denklemlerin belirtilen aralıklardaki köklerini Newton yöntemi yardımıyla bulunuz. (4. yaklaşıma kadar hesaplayınız.)

a) $x^2 - 3 = 0$, $[2,3]$

b) $x^3 - 2 = 0$, $[1,2]$

c) $x^2 - 3x - 1 = 0$, $[0,1]$

d) $x^3 + 2x - 1 = 0$, $[0,1]$

e) $x^2 - \sin x = 0$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

f) $5x + \cos x = 5$, $[0,1]$

26. $3\sqrt{2}$ sayısının yaklaşık değerini bulunuz.

10.4 SERİLER

Bilindiği gibi, bir (a_n) dizisi için

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

toplamı, kısaca $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ sembolü ile gösterilir. Buradaki $\sum$ sembolüne toplama sembolü denir ve "sigma" biçiminde okunur. Buna göre

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{21}$$

$$\sum_{i=0}^{100} \frac{1}{3^i} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{100}}$$

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{r}{r+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1}$$

olacaktır.

(a_k) bir dizi olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots$$

biçimindeki bir ifadeye bir sonsuz seri veya kısaca bir seri denir.

a_n ifadesine serinin genel terimi adı verilir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^n} + \cdots$$

bir sonsuz seri olup genel terimi $\frac{1}{5^n}$ dir.

Toplama işlemi bir ikili işlem olduğu için sonlu çokluktaki sayılar toplanabilir. Şimdi sonsuz seriye bir anlam vermeye çalışalım.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n$ serisi verildiğinde (a_n) dizisinin ilk n teriminin toplamından oluşan (S_n) dizisine serinin kısmi toplamlar dizisi adı verilir. Şu halde

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

olacaktır.

TANIM

Bir serinin kısmi toplamlar dizisi yakınsak ise seriye yakınsak seri adı verilir. Kısmi toplamlar dizisinin limitine serinin toplamı denir. Yakınsak olmayan serilere ıraksak seriler adı verilir.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi için

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

olsun. Bu takdirde

$$\lim s_n = s \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$$

olacaktır.

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz. Yakınsak ise toplamını bulunuz.

Çözüm : Her $k \in N^+$ için

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

dir. $\lim s_n = \frac{n}{n+1} = 1$ olduğundan verilen seri yakınsak ve toplamı 1 dir. Buna göre

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

yazılabilir.

ÖRNEK : $|r| < 1$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1}$$

serisinin yakınsak olduğunu gösterip toplamını bulunuz. Genel terimi bir geometrik dizinin genel terimi olan bu seriye bir adı verilir.

Çözüm :

$$\begin{aligned} S_n &= a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} \\ &= a(1 + r + \ldots + r^{n-1}) = a\frac{1-r^n}{1-r} \end{aligned}$$

olur. $|r| < 1$ için $\lim r^n = 0$ olduğundan

$$\lim S_n = \lim a\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

dir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}$$

olur.

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{n} \log \frac{k}{k+1}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} S_n &= \log\frac{1}{2} + \log\frac{2}{3} + \log\frac{3}{4} + \cdots + \log\frac{n}{n+1} \\ &= \log\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n}{n+1}\right) = \log\left(\frac{1}{n}\right) = -\log(n+1) \end{aligned}$$

olur. $\lim S_n = \lim(-\log(n+1)) = -\infty$ olduğundan (S_n) ıraksak, dolayısıyla verilen seri ıraksaktır.

ÖRNEK : Aşağıdaki devirli ondalık sayıları rasyonel biçimde yazınız.

a) $0{,}666\ldots = 0{,}\overline{6}$

b) $0{,}4343\ldots = 0{,}\overline{43}$

Çözüm :

a) $$\begin{aligned} 0{,}\overline{6} = 0{,}666\ldots &= \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \cdots \\ &= \frac{6}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \cdots\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{5}\cdot\frac{10}{9} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

olur.

b) $0,\overline{43} = 0,434343\ldots$

$$= \frac{4}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{1000}+\frac{3}{10000}+\cdots$$

$$= \frac{43}{100}+\frac{43}{10000}+\cdots$$

$$= \frac{43}{100}\left(1+\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}+\cdots\right)$$

$$= \frac{43}{100}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{43}{100}\cdot\frac{100}{99} = \frac{43}{99}$$

olur.

Dizilerin özellikleri gözönüne alındığında aşağıdaki teoremin ispatı kolayca yapılabilir.

TEOREM 10.9:

a) $\sum a_n = a$ ve $\sum b_n = b$ ise $\sum (a_n + b_n) = a + b$

b) $\sum a_n = a$ ise $\sum \lambda a_n = \lambda a$

dır.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ve toplamı s olsun.

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n ,$$

ve

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}$$

olacağından

$$S_n - S_{n-1} = a_n$$

dir. $\lim S_{n-1} = \lim S_n = s$ olacağından

$$\lim a_n = \lim(S_n - S_{n-1}) = s - s = 0$$

bulunur. Böylece şu teorem ispat edilmiş oldu.

TEOREM 10.10:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yakınsak ise $\lim a_n = 0$ dır.

Bu teoremin karşıtı doğru değildir. Yani $\lim a_n = 0$ olması $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olmasını gerektirmez. Örneğin $\lim \log \frac{n}{n+1} = \log 1 = 0$ olduğu halde $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n}{n+1}$ serisi ıraksaktır.

Bu teoremden şu sonucu çıkarabiliriz :

SONUÇ 10.1:

$\lim a_n \neq 0$ ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

ÖRNEK : $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{1}{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n+10}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1}$ serilerinin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

Çözüm :

$\lim 2^{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{n+10} = 2 \neq 0$ $\lim(-1)^n$ yoktur, $\lim \frac{n^2}{n+1} = +\infty \neq 0$

olduğundan verilen serilerin tümü ıraksaktır.

TANIM

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots$$

toplamına $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisinin kalan terimi denir.

Kalan terim ile yakınsaklık arasında aşağıdaki ilişki vardır.

TEOREM 10.11:

Yakınsak bir seride kalan terimin limiti sıfırdır.

İspat : $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ olsun. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi (S_n) ise $\lim S_n = S$ dir.

Diğer taraftan $\sum a_k = s_n + R_n \Rightarrow s = \lim(s_n + R_n) \Rightarrow$

$$s = \lim S_n + \lim R_n \Rightarrow s = s + \lim R_n \Rightarrow \lim R_n = 0$$

bulunur.

$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1})$ biçimindeki serilere [illegible] adı verilir.

"$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1})$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart (a_n) dizisinin yakınsak olmasıdır."

önermesinin doğruluğunu gösteriniz.

(a_n) yakınsak olduğunda

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - \lim(a_k)$$

olacağını gösteriniz. Bundan yararlanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)} = \frac{3}{4}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1$

c) $\sum_{k=1}^{\infty}\ln\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2} = \ln\frac{2}{3}$

ç) $\sum_{k=2}^{\infty}\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln 2$

d) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2 - 1} = \frac{1}{2}$

e) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2}{k^2 - 1} = 1$

f) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$

g) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!} = 1$

Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k} = \frac{3}{2}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4^k - 3^k}{12^k} = \frac{1}{6}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$

ç) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{5}{8}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2})^{1-n} = 2 + \sqrt{2}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3.5^n + 5.3^n}{(15)^n} = \frac{11}{4}$

Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $0,111\cdots = 0,\overline{1} = \frac{1}{9}$

b) $0,24999\ldots = 0,24\overline{9} = \frac{1}{4}$

c) $0,2727\ldots = 0,\overline{27} = \frac{3}{11}$

10 m yükseklikten bırakılan bir top yere çarpınca düştüğü yüksekliğin $\frac{2}{5}$ si kadar yükseliyor. Top duruncaya kadar kaç m yol alır?

$|r| < 1$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} kr^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}$$

olduğunu gösteriniz.

Bundan yararlanarak

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}$

b) $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{5^k}$

c) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{k+1}}{7^k}$

serilerinin toplamını bulunuz.

Bütün serilerin kısmi toplamlar dizisini hesaplayıp yakınsaklığını incelemek mümkün değildir. Bu hallerde serinin yakınsaklığı hakkında birşeyler söylemek için yakınsaklık testleri (kriterleri) denilen bazı testler vardır. Önce pozitif terimli seriler ve onlarla ilgili testleri verelim.

TANIM

Her k doğal sayısı için $a_k \geq 0$ ise $\sum a_k$ serisine bir pozitif terimli seri denir.

Pozitif terimli serilerin kısmi toplamlar dizisi monoton artan olduğundan bu serilerin yakınsak olduğunu göstermek için kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.

Şimdi bu seriler için yakınsaklık testlerini verelim.

TEOREM 10.12 : (Karşılaştırma Testi)

Her $k \in N$ için $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ ve $a_k \leq C \cdot b_k$ olacak şekilde bir C sabiti mevcut olsun.

1) $\sum b_k$ yakınsak ise $\sum a_k$ yakınsaktır.

2) $\sum a_k$ ıraksak ise $\sum b_k$ ıraksaktır.

İspat :

1) $\sum b_k = b$ olsun. Her $k \in N$ için $a_k \leq C\, b_k$ olduğundan

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq C(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leq C \sum_{k=1}^{\infty} b_k = Cb \quad \text{olur.} \quad \sum a_k$$

serisinin kısmi toplamlar dizisi monoton artan ve sınırlı olduğundan yakınsak ve dolayısıyla $\sum a_k$ yakınsaktır.

2) $\sum a_k$ ıraksak olsun. O halde $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$ sınırsızdır.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq C\,(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

olduğundan

$$(b_1 + b_2 + \ldots\ b_n)$$

dizisi sınırsız dolayısıyla ıraksaktır. O halde $\sum b_k$ ıraksaktır.

Not : Bir serisinin baştan birkaç teriminin alınıp alınmaması serisinin karakterini değiştirmeyeceğinden yukarıdaki test şöyle de verilebilir :

SONUÇ 10.2 :

$p \in N$ ve $k \geq p$ için $a_k \leq C\, b_k$ olacak şekilde bir C sabiti mevcut olsun.

1) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsaktır.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ıraksak ise $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ıraksaktır.

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k}{k(k+1)}$ serinin karakterini inceleyiniz.

Çözüm : Her $k \in N$ için $\sin^2 k \leq 1$ olduğundan

$$\frac{\sin^2 k}{k(k+1)} \leq \frac{1}{k(k+1)}$$

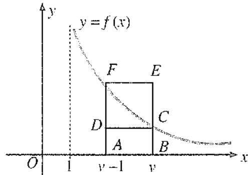
dır. Diğer taraftan $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ serisinin yakınsak ve toplamının 1 olduğunu yukarıda göstermiştik. O halde verilen seri de yakınsaktır.

TEOREM 10.13 (İntegral Testi) :

(a_n) pozitif bir dizi, f de $[1, +\infty)$ üzerinde pozitif tanımlı, sürekli azalan bir fonksiyon ve her $k \in N$ için

$$f(k) = a_k$$

olsun. $\sum a_k$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart, $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integralinin yakınsak olmasıdır.



İspat : f fonksiyonunun grafiği yandaki gibi olsun. $\nu \geq 2$ için

$$\text{Alan}(ABCF) = \int_{\nu-1}^{\nu} f(x)dx$$

dir. Bu alan $ABCD$ dikdörtgeninin alanından büyük, $ABEF$ dikdörtgeninin alanından küçüktür.

$$\text{Alan}(ABCD) = |AB|\, |BC| = 1\, .f(\nu) = a_\nu$$

$$\text{Alan}(ABEF) = |AB|\, |AF| = 1.f(\nu - 1) = a_{\nu-1}$$

olduğundan

$$a_\nu < \int_{\nu-1}^{\nu} f(x)dx < a_{\nu-1}$$

yazılabilir. $\nu = 2, 3, \ldots, n$ için bu eşitsizlikler yazılır ve taraf tarafa toplanırsa

$$a_2 + a_3 + \ldots + a_n < \int_1^n f(x)dx < a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

bulunur. Buradan da

$$S_n - a_1 < \int_1^n f(x)\,dx < S_{n-1}$$

bağıntısı elde edilir.

Buradan, (S_n) sınırlı olduğunda $\left(\int_1^n f(x)\,dx\right)$ sınırlı, $\left(\int_1^n f(x)\,dx\right)$ sınırlı olduğunda (S_n) nin sınırlı olacağı görülmektedir. (S_n) nin sınırlı olması $\sum a_k$ serisinin yakınsak olmasını gerektirdiğinden, $\sum a_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\left(\int_1^n f(x)\,dx\right)$ dizisinin sınırlı, yani yakınsak olmasıdır. Bu dizinin yakınsak olması $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ integralinin yakınsak olmasından başka bir şey değildir.

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : Verilen serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx$$

integralinin yakınsak olmasıdır. Diğer taraftan

$$\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(\int_1^n e^{-x}\,dx\right) = \lim_{n\to\infty}(e^{-1} - e^{-n}) = \frac{1}{e}$$

olacağından $\int_1^{\infty} e^{-x}\,dx$ yakınsaktır. Şu halde verilen seri yakınsaktır.

Bir serinin baştan birkaç teriminin alınması veya değiştirilmesi serinin yakınsaklık durumunu değiştirmeyeceğinden, integral testinde f fonksiyonunun tanım kümesi olan $[1, +\infty)$ aralığı değiştirilebilir. Aşağıdaki örnekte bu aralık $[2, +\infty)$ olarak alınmıştır.

ÖRNEK : $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $x \in [2, +\infty)$ için

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

olsun. Her $k \geq 2$ için

$$f(k) = \frac{1}{k \ln k}$$

olur. f fonksiyonu $[2,+\infty)$ üzerinde pozitif tanımlı, azalan ve sürekli bir fonksiyondur.

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to \infty} \int_2^{b} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \to \infty} \left(\ln(\ln x)\Big|_2^{b} \right)$$

$$= \lim_{b \to \infty} \left(\ln(\ln b) - \ln(\ln 2) \right) = \infty$$

olduğundan, verilen $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ serisi ıraksaktır.

ÖRNEK : $p-$ serileri denilen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serilerinin $p > 1$ için yakınsak, $p \leq 1$ için ıraksak olacağını gösteriniz.

Çözüm : Genelleştirilmiş integraller bölümünde

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$$

integrallerinin $p > 1$ için yakınsak, $p \leq 1$ için ıraksak olduklarını biliyoruz. Diğer taraftan, integral testi gereğince $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisiyle $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}$ integrali aynı karakterde olduklarından, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisi $p > 1$ için yakınsak, $p \leq 1$ için ıraksaktır.

ÖRNEK : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2}}{n\sqrt{n}}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $\frac{e^{-n^2}}{n\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ ve $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ serisi yakınsak $\left(p = \frac{3}{2} > 1\right)$ olduğundan, karşılaştırma testi gereğince verilen seri de yakınsaktır.

İntegral testinin hipotezlerini sağlayan (a_n) dizisi ve f fonksiyonu için

$$S_n - a_1 < \int_1^{n} f(x)dx < S_{n-1}$$

olduğunu göstermiştik. $\sum a_n$ yakınsak ve toplamı S ise $\int_1^{\infty} f(x)dx$ integrali de yakınsak olur. Bu integralin değeri I ise, yukarıdaki eşitsizlikten

$$S - a_1 \leq I \leq S \Rightarrow I \leq S \leq I + a_1$$

bulunur.

ÖRNEK : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ serisinin yakınsak olduğunu gösterip

$$\frac{\pi}{4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

eşitsizliğinin varlığını ispatlayınız.

Çözüm :

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \to \infty} \left(\int_1^{b} \frac{dx}{1+x^2} \right)$$

$$= \lim_{b \to \infty} (\arctan b - \arctan 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

olduğundan,

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ yakınsak, dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ yakınsaktır.

$a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ olduğundan

$$I \leq S \leq I + a_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

bulunur.

Yukarıda görüldüğü gibi

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ serisi $p > 1$ için yakınsak, $p \leq 1$ için ıraksaktır. Bu gerçek ve karşılaştırma testinden aşağıdaki test kolayca ispatlanabilir.

TEOREM 10.14 (Limit Testi) **:**

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri ve

$$\lim_{n \to \infty} n^p a_n = \gamma$$

olsun.

1) $0 \leq \gamma < +\infty$ ve $p > 1$ ise $\sum a_n$ yakınsak,

2) $0 < \gamma \leq +\infty$ ve $p \leq 1$ ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

ÖRNEK : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{5n^3-2}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2n+1)}{5n^3-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+n^2}{5n^3-2} = \frac{2}{5}$

olur. $\gamma = \frac{2}{5}$ ve $p = 2 > 1$ olduğundan verilen seri yakınsaktır.

Şimdi seriler konusunda en çok kullanılan iki testi verelim.

TEOREM 10.15 (Oran Testi) :

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bir pozitif terimli seri ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$$

olsun. Eğer

1) $r < 1$ ise $\sum a_n$ yakınsak

2) $r > 1$ ise $\sum a_n$ ıraksaktır.

3) $r = 1$ durumunda seri yakınsak da, ıraksak da olabilir.

İspat :

1) $0 < r < 1$ olsun. $r < s < 1$ olacak şekilde sabit bir s sayısı seçelim. Öyle bir n_0 sayısı vardır ki, $\forall n \geq n_0$ için $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq s$ kalır. Buradan her $n \geq n_0$ için

$$a_{n+1} \leq s\, a_n$$

yazılabilir. Şu halde her $m \in N$ için,

$$a_{n_0+1} \leq s\, a_{n_0}, \quad a_{n_0+2} \leq s\, a_{n_0+1}, \; \ldots, \; a_{n_0+m} \leq s\, a_{n_0+m-1}$$

olur. Bunlar taraf tarafa çarpılır ve her iki tarafta bulunan terimler sadeleştirilirse

$$a_{n_0+m} \leq s^{m-1} a_{n_0}$$

eşitsizliği elde edilir. $0 < s < 1$ olduğundan $\sum_{m=1}^{\infty} a_{n_0} s^{m-1}$ geometrik serisi yakınsaktır. Karşılaştırma testinden $\sum_{m=1}^{\infty} a_{n_0+m}$ serisi ve dolayasıyla $\sum_{m=1}^{\infty} a_m$ serisi yakınsaktır.

2) $r > 1$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ dizisinin sonlu sayıdaki terimleri hariç diğer tüm terimleri r nin $\varepsilon-$ komşuluğunda bulunacağından, öyle bir n_1 sayısı vardır ki, $\forall n \geq n_1$ için $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$ olur. O halde (a_n) dizisinin a_{n_1} teriminden sonraki tüm terimleri artandır. Dolayısıyla $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ ıraksaktır sonucu elde edilir.

3) $\sum \frac{1}{n}$ serisi ıraksak, $\sum \frac{1}{n^2}$ serisi yakınsaktır. Fakat her iki seri için de $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ dir. Şu halde $r = 1$ olması halinde seri yakınsak da olabilir, ıraksak da.

ÖRNEK : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$ yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{2^n n!}{n^n} = \frac{1}{2}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

olur. $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ olduğundan

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$$

bulunur. Şu halde verilen seri ıraksaktır.

ÖRNEK : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0 < 1$

olduğundan verilen seri yakınsaktır. Bu serinin toplamının e olduğu ileride gösterilecektir. Şu halde

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

olur. Baştan itibaren ne kadar çok terim alınıp toplanırsa e sayısına o kadar yakın değerler bulunur. Açıkça görüldüğü gibi

$$\frac{5}{2} < e < 3$$

dür.

ÖRNEK : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} = \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$= \frac{2(n+1)}{2n+1} = \frac{2n+2}{2n+1}$$

olduğundan

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{2n+2}{2n+1} = 1$$

dir. Oran testine göre birşey söylenemez. Fakat

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$$

olduğundan (a_n) bir artan dizidir. $a_1 = \frac{4.1}{2} = 2$ olacağından (a_n) dizisinin tüm terimleri 2 veya 2 den büyüktür. Dolayısıyla sıfıra yakınsayamaz. $\lim a_n \neq 0$ olduğundan $\sum a_n$ ıraksaktır.

> **TEOREM 10.16** (Kök Testi) :
> (a_n) pozitif terimli bir dizi ve
>
> $$\lim \sqrt[n]{a_n} = r$$
>
> olsun.
>
> 1) $r < 1$ ise $\sum a_n$ yakınsak,
>
> 2) $r > 1$ ise $\sum a_n$ ıraksaktır.
>
> 3) $r = 1$ durumunda birşey söylenemez.

İspat : Bu teoremin ispatı oran testinin ispatına benzer olduğundan okuyucuya bırakıyoruz.

ÖRNEK : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1$

olduğundan verilen seri yakınsaktır.

ÖRNEK : $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{n}\right)^n$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{n}\right)^n} = \lim\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{n}\right) = \frac{3}{2} > 1$

olduğundan verilen seri ıraksaktır.

ÖRNEK : $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm :

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}} = \lim \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$= \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

olduğundan verilen seri yakınsaktır.

10.6 ALTERNE SERİLER

Terimlerinin işareti ardışık olarak değişen serilere alterne seriler denir. Örneğin,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - + \cdots$$

serileri birer alterne seridir. Şimdi bu seriler için geçerli olan bir test verelim.

> **TEOREM 10.17** (Leibnitz Testi) :
> Eğer
>
> 1) Her $n \geq 1$ için $0 < a_{n+1} \leq a_n$
>
> 2) $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$
>
> ise bu takdirde $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ serisi yakınsaktır.

İspat : $\sum(-1)^{n-1}a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (S_n) olsun.

$0 < a_{n+1} \le a_n$ olduğundan

$$S_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2n-1} - a_{2n})$$

şeklinde tanımlanan (S_{2n}) dizisi artan bir dizidir. S_{2n} genel terimi

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \ldots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n}$$

şeklinde de yazılabilir. Bu toplamdaki ilk terim hariç diğer tüm terimler negatif veya sıfırdır. Dolayısıyla her n için

$$S_{2n} \le a_1$$

yazılabilir. Şu halde (S_{2n}) dizisi sınırlıdır.

Monoton artan ve sınırlı her dizi yakınsak olduğundan (S_{2n}) yakınsaktır.

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = L$$

diyelim. $L \le a_1$ olacaktır.

$$\lim S_{2n-1} = \lim[S_{2n} + a_{2n}]$$
$$= \lim S_{2n} + \lim a_{2n}$$
$$= L + \lim a_{2n}$$

dır. Diğer taraftan (a_{2n}) dizisi (a_n) dizisinin bir alt dizisi olduğundan

$$\lim a_{2n} = \lim a_n = 0$$

dır. Şu halde

$$\lim S_{2n-1} = L$$

dır. Demek ki n ister tek ister çift olsun (S_n) kısmi toplamlar dizisi aynı bir L sayısına yakınsamaktadır. Buna göre

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L$$

dır. Şu halde

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \text{ serisi yakınsaktır.}$$

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ alterne serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

Çözüm : $a_k = \frac{1}{k}$ alınırsa $0 < a_{k+1} < a_k$ ve $\lim a_k = 0$ olur.

Leibnitz kriterinden verilen seri yakınsak olur.

TANIM

Terimleri $\sum a_k$ serisinin terimlerinin mutlak değerinden oluşan $\sum|a_k|$ serisi yakınsak ise $\sum a_k$ serisi mutlak yakınsaktır denir. $\sum a_k$ yakınsak fakat $\sum|a_k|$ ıraksak ise bu takdirde $\sum a_k$ serisi şartlı yakınsaktır denir.

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ serisinin mutlak yakınsak olup olmadığını araştırınız.

Çözüm : $\left|\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\right| = \frac{1}{k^2}$ ve $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ serisi yakınsak olduğundan verilen seri mutlak yakınsaktır.

TEOREM 10.18 :

Mutlak yakınsak her seri yakınsaktır.

İspat : $\sum|a_n|$ yakınsak olsun.

$$0 \le |a_n| - a_n \le |a_n| + |a_n| < 2\,|a_n|$$

olacağından, karşılaştırma testi gereğince $\sum|a_n| - a_n$ serisi yakınsaktır. Bu seri ve $\sum|a_n|$ serisi yakınsak olduğundan, bunların farkı olan

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| - \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

serisi de yakınsaktır.

$\sum|a_n|$ pozitif terimli bir seri olduğundan, pozitif terimli seriler için geçerli olan tüm testler bunun için de geçerlidir. $\sum|a_n|$ yakınsaksa $\sum a_n$ de yakınsak olur.

ÖRNEK : $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n!}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

Çözüm : $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyelim.

$$\lim\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim\frac{2^{n+1}}{(n+1)}\frac{n!}{2^n} = \lim\frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

olduğundan $\sum|a_n|$ yakınsak, dolayısıyla $\sum a_n = \sum(-1)^n\frac{2^n}{n!}$ serisi yakınsaktır.

PROBLEMLER

1. Aşağıda genel terimleri verilen serilerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a) $\dfrac{1}{n^2+n+1}$ b) $\dfrac{n^3+1}{n^4+1}$

c) $\dfrac{n}{n+1}$ ç) $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}$

d) $\dfrac{\ln n}{n}$ e) $\dfrac{\sqrt{n}}{\ln n}$

f) $\dfrac{1+\cos^2 n}{n^2}$ g) $\dfrac{1}{\sqrt{n^3}+1}$

h) $n^2 e^{-x}$ ı) $\dfrac{n}{e^{n^2}}$

i) $\dfrac{e^{1/n}}{n^2}$ j) $\dfrac{\arctan n}{n}$

k) $\dfrac{\ln n}{e^n}$ l) $\dfrac{1}{n+n^{3/2}}$

2. Aşağıdaki serilerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n+1}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{10}{n}\right)^n$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ ç) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+2)!}{3^n(n!)^2}$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n(n!)^2}{(2n)!}$ e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{n^{n^2}}$ g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{(2^n)^2}$

h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-2n}$ ı) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n(n!)}$ j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)^n$

k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{e}{\pi}\right)^n$ l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1.3\cdots(2n-1)}{4^n 2^n n!}$ n) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1.3\cdots(2n-1)}{[2.4\cdots(2n)](3n+1)}$

o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^n}$ ö) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n+1}\right)^n$

3. Aşağıda genel terimleri verilen serilerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz. Mutlak veya şartlı yakınsak olup olmadıklarını araştırınız.

a) $\dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ b) $(-1)^{n+1}\dfrac{\ln n}{n}$

c) $\dfrac{(-10)^n}{n!}$ ç) $(-1)^n\dfrac{n^n}{3^{n^2}}$

d) $(-1)^{n-1}\dfrac{3^n}{n(2^n+1)}$ e) $(-1)^n\dfrac{n!}{n^n}$

f) $(-1)^n\dfrac{2^{3n}}{7^n}$ g) $(-1)^n\dfrac{2n-1}{2n+1}$

4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\dfrac{2k+1}{k(k+1)}=1$ olduğunu gösteriniz.

5. Aşağıda tanımlanan (a_n) dizileri için $\sum a_n$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz. Verilen indirgeme bağıntıları her $n \geq 1$ için verilmiştir.

a) $a_1=\dfrac{1}{3}$, $a_{n+1}=\dfrac{3n-1}{2n+5}a_n$

b) $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{n}{(n-1)(n+1)}a_n$

c) $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{1+\sin n}{n}a_n$

ç) $a_1=3$, $a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n$

d) $a_1=-1$, $a_{n+1}=\dfrac{1+\ln n}{n}a_n$

6. $a_1=a_2=1$ ve $n\geq 2$ için

$a_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_n}$ bağıntısını sağlayan (a_n) dizisi için $\sum a_n$ serisinin karakterini inceleyiniz.

7. Genel terimi $a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{3^n}, & n \text{ tek ise}\\[2mm] \dfrac{n}{3^n}, & n \text{ çift ise}\end{cases}$

biçiminde tanımlanan $\sum a_n$ serisinin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

10.7 KUVVET SERİLERİ

TANIM

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\cdots$$

şeklindeki bir seriye kuvvet serisi denir. Buradaki c_k sayılarına serinin katsayıları adı verilir.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(x-1)^k}{k}=(x-1)+\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3+\cdots,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{k^2}=x^2+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{9}+\cdots$$

serileri birer kuvvet serisidir. Eğer $\forall k \geq p$ için $c_k=0$ ise bu takdirde

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots+c_p(x-a)^p$$

olur. Şu halde bu özel durumda kuvvet serisi bir polinom olur.

Verilen bir kuvvet serisinde esas konu, bu serinin ıraksaklığı veya yakınsaklığı problemi değildir. Çünkü serinin terimleri x'e bağlı olduklarından, bu seri bazı x ler için yakınsak olabileceği gibi, bazıları için de ıraksak olabilir. Kuvvet serilerinde inceleyeceğimiz problem şudur:

Verilen bir kuvvet serisi acaba hangi x ler için yakınsak, hangileri için ıraksaktır?

Her kuvvet serisinin $x=a$ için yakınsak olacağı açıktır. Bu nedenle hangi x ler derken a dan farklı x leri kastediyoruz. Her x için yakınsak kuvvet serileri de vardır. Örneğin

$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{x^k}{k!}$ serisi her $x\in R$ için yakınsaktır. Çünkü her $x\in R$ için

$$\lim\left|\frac{a_{k+1}}{a_n}\right|=\lim\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{x^k}\right|=\lim\frac{|x|}{k+1}=0<1$$

dir. Oran testinden, serinin her x için yakınsak olduğu çıkar.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^k(x-1)^k$ serisi de 1 den farklı her x için ıraksaktır. Gerçekten her $x\neq 1$ için

$$\lim\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim\left|\frac{(k+1)^{k+1}(x-1)^{k+1}}{k^k(x-1)^k}\right|=\lim(k+1)\left(\frac{k+1}{k}\right)^k|x-1|$$

$$=\infty\,.\,e\,|x-1|=\infty>1$$

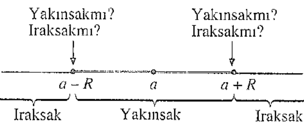
olur.

Bazı kuvvet serileri bir aralıktaki x ler için yakınsak, bu aralığın dışındaki x ler için ıraksaktır. Örneğin $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ serisi $[-1,1)$ aralığında yakınsak, bu aralığın dışındaki x ler için ıraksaktır. Gerçekten

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\,\frac{n}{x^n}\right| = \lim\frac{n}{n+1}|x| = |x|$$

dir. Oran testinden, $|x|<1 \Rightarrow -1<x<1$ için seri mutlak yakınsak ve dolayısıyla yakınsaktır. $|x|>1 \Rightarrow x<-1$ veya $x>1$ için seri ıraksaktır.

$x=-1$ için yakınsak $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ alterne serisi, $x=1$ için $\sum\frac{1}{n}$ ıraksak harmonik serisi elde edilir. Şu halde seri $[-1,1)$ aralığında yakınsaktır.



TANIM

$\sum c_k(x-a)^k$ kuvvet serisinin $|x-a|<R$ için yakınsak olduğu en büyük pozitif R sayısına, bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı, seriyi yakınsak yapan x noktalarının oluşturduğu aralığa da yakınsaklık aralığı denir.

Yakınsaklık yarıçapı aşağıdaki teorem yardımıyla kolayca bulunabilir.

TEOREM 10.19 (Cauchy – Hadamard Teoremi) :

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$ kuvvet serisi için

$$\lim\sqrt[n]{|c_n|} = L$$

olsun.

1) $L \neq 0$ ise $R=\frac{1}{L}$ dir. Bu halde seri $|x-a|<R$ için yakınsak, $|x-a|>R$ için ıraksaktır.

2) $L=0$ ise $R=\infty$ dur. Bu durumda seri her x için yakınsaktır.

3) $L=\infty$ ise $R=0$ dır. Bu halde seri sadece $x=a$ için yakınsaktır.

İspat : Teoremin ispatı kök testinin bir uygulamasıdır. Bunu bir alıştırma olarak okuyucuya bırakıyoruz.

ÖRNEK : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm : $L=\lim\sqrt[n]{|c_n|}=\lim\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=\lim\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{1}=1$

olduğundan $R=\frac{1}{L}=\frac{1}{1}=1$ dir. Şu halde verilen seri $|x-2|<1$ için yakınsaktır.

$$|x-2|<1 \Rightarrow -1<x-2<1 \Rightarrow 1<x<3$$

olur. Şu halde seri $(1,3)$ aralığında yakınsaktır. $x=1$ ve $x=3$ için yakınsak olup olmadığını araştıralım. $x=1$ için $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

alterne serisi elde edilir. $\left(\frac{1}{n}\right)$ monoton azalan bir sıfır dizisi olduğundan bu seri yakınsaktır.

$x=3$ için ıraksak $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ serisi elde edilir. O halde yakınsaklık aralığı $[1,3)$ aralığıdır.

Cauchy – Hadamard teoreminde $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=L$ limiti yerine $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=L$ alınabilir.

ÖRNEK : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm : $c_n=\frac{1}{n!}$ olduğundan

$$L=\lim\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\lim\frac{1}{(n+1)!}n!=\lim\frac{1}{n+1}=0$$

dır. Şu halde $R=\infty$, yani seri her x için yakınsaktır. Yakınsaklık aralığı $(-\infty,+\infty)$ aralığıdır.

ÖRNEK : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n}$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

Çözüm : $c_{2k}=\frac{1}{3^k}$ olduğundan

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{c_{2k}}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{\frac{1}{3^k}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{3^{\frac{k}{2k}}}=\frac{1}{3^{1/2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

olur. O halde $R = \sqrt{3}$ tür. Verilen seri $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ aralığında yakınsaktır.

$x = -\sqrt{3}$ ve $x = \sqrt{3}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ ıraksak serisi elde edileceğinden yakınsaklık aralığı $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ aralığıdır.

Yukarıdaki örneklerden de görüldüğü gibi, $\sum c_k (x-a)^k$ kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı,

$[a,a]$, $[a-R, a+R]$, $[a-R, a+R)$, $(a-R, a+R]$, $(a-R, a+R)$, $(-\infty, +\infty)$ aralıklarından biridir. İlk aralık R nin sıfır, son aralık R nin $+\infty$ olması durumuna karşılık gelir.

$|x| < 1$ için

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

olduğunu biliyoruz. Şu halde $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ serisi $|x| < 1$ için bir $f(x) = \frac{1}{1-x}$ fonksiyonu tanımlamaktadır. Bu durum tüm yakınsak kuvvet serileri için geçerlidir. Her kuvvet serisi, yakınsaklık aralığı üzerinde bir fonksiyon tanımlar. Kuvvet serilerinin türev ve integrali ile ilgili aşağıdaki teoremleri ispatsız olarak veriyoruz. Zira bunların ispatı, bu kitapta olmayan bazı bilgilere ihtiyaç göstermektedir.

TEOREM 10.20 (Terim – Terim Türevlenebilme Teoremi) :
$\sum c_k (x-a)^k$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R ve $\forall x \in (a-R, a+R)$ için

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

olsun. f fonksiyonu $(a-R, a+R)$ aralığında türevlenebilirdir ve

$$f'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k\right)' = \sum_{k=0}^{\infty} \left[c_k (x-a)^k\right]' = \sum_{k=0}^{\infty} k c_k (x-a)^{k-1}$$

dır. Ayrıca $\sum c_k (x-a)^k$ ve $\sum k c_k (x-a)^{k-1}$ serilerinin yakınsaklık yarıçapları aynıdır.

ÖRNEK : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ serisinin toplamını bulunuz.

Çözüm : $|x| < 1$ için $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ olduğu bilinmektedir.

Her $x \in (-1,1)$ için

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} \Rightarrow \frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

bulunur. $x = \frac{1}{3}$ yazılırsa

$$\frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4}$$

olur.

UYARI : Yukarıdaki iki serinin yakınsaklık yarıçaplarının aynı olması, yakınsaklık aralıklarının aynı olmasını gerektirmez. Aralığın uç noktalarında seriler farklı karakterde olabilirler.

ÖRNEK : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k}$ serilerinin yakınsaklık yarıçaplarını ve yakınsaklık aralıklarını bulunuz.

Çözüm :

$$R_1 = \frac{1}{\lim \left| \frac{k^2}{(k+1)^2} \right|} = 1 \text{ dir.}$$

$|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ olur. $x = -1$ ve $x = 1$ için birinci seri yakınsak olduğundan bu serinin yakınsaklık aralığı $I_1 = [-1,1]$ kapalı aralığıdır. $\sum \frac{x^{k-1}}{k}$ serisi için

$$R_2 = \frac{1}{\lim \left| \frac{k}{k+1} \right|} = 1 \text{ dir.}$$

$|x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$ olur. $x = -1$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ yakınsak, $x = 1$ için $\sum \frac{1}{k}$ ıraksaktır. O halde bu serinin yakınsaklık aralığı $I_2 = [-1,1)$ yarı açık aralığıdır.
$R_1 = R_2 = 1$ olup, $I_1 \neq I_2$ dir.

Şimdi kuvvet serilerinin integrallenebilmesi ile ilgili teoremi verelim.

TEOREM 10.20 (Terim – Terim İntegrallenebilme Teoremi) :

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R ve $x \in (a-R, a+R)$ için

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

olsun. f fonksiyonu integrallenebilirdir ve

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^x (t-a)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

dır.

ÖRNEK : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n}$ serisinin toplamını bulunuz.

Çözüm : $|x| < 1$ için

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

olduğu bilinmektedir. $0 < x < 1$ için

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt \Rightarrow$$

$$-\ln|1-t| \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x \Rightarrow$$

$$-\ln|1-x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

bulunur. $x = \frac{1}{3}$ yazılırsa

$$-\ln\frac{2}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n3^n} = \ln\frac{3}{2}$$

olur.

10.8 TAYLOR SERİLERİ

Bundan önceki keşimde, her kuvvet serisinin yakınsaklık aralığı üzerinde bir fonksiyon tanımlandığını belirtmiştik. Bu kesimde bir fonksiyon verildiğinde bir nokta komşuluğunda ona karşılık gelen seri bulunacaktır.

TANIM

f fonksiyonu a noktasını ihtiva eden bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

serisine, f fonksiyonu tarafından a noktasında üretilen Taylor Serisi adı verilir.

Şimdi aklınıza şu iki soru gelebilir :

1) a noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor serisi a dan farklı herhangi bir x için yakınsak mıdır?

2) Eğer yakınsak ise toplamı $f(x)$ midir?

Belki beklenmedik bir cevap olacak ama bu iki sorunun cevabı genelde "hayır" dır. Yani Taylor serisi $x \neq a$ için yakınsak da olabilir, ıraksak da. Yakınsak olduğunda toplamı $f(x)$ de olabilir, $f(x)$ den farklı da.

Şimdi bazı fonksiyonlar tarafından üretilen birkaç Taylor serisi bulalım.

ÖRNEK : $f(x) = e^{2x}$ fonksiyonunun $x = 1$ noktası civarında ürettiği Taylor serisini bulunuz.

Çözüm :

$$f'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow f''(x) = 2.2e^{2x} = 2^2 e^{2x} \Rightarrow$$

$$f'''(x) = 2^3 e^{2x}, \cdots, f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x}$$

olacağından

$$f^{(n)}(1) = 2^n e^2$$

olur. O halde $f(x) = e^{2x}$ fonksiyonunun $x = 1$ noktasında ürettiği Taylor serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n e^2}{n!} (x-1)^n$$

olur.

ÖRNEK : $f(x) = \cos 3x$ fonksiyonunun $x = 0$ noktası civarında ürettiği Taylor serisini yazınız.

Çözüm :

$$f'(x) = -3\sin 3x = 3^1\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -3^2\cos 3x = 3^2\cos\left(3x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = 3^3\sin 3x = 3^3\cos\left(3x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

olduğundan her $n \in N$ için

$$f^{(n)}(x) = 3^n\cos\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right)$$

dır. $x = 0$ için

$$f^{(n)}(0) = 3^n\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k+1 \text{ ise} \\ (-1)^k 3^{2k}, & n = 2k \text{ ise} \end{cases}$$

bulunur. Buna göre istenen Taylor serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 3^{2k}}{(2k)!}x^{2k}$$

olur. Genel olarak $f(x) = \cos ax$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında ürettiği Taylor serisi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n}}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a^4}{4!}x^4 - \frac{a^6}{6!}x^6 + - \cdots$$

$$= 1 - \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^4}{4!} - \frac{(ax)^6}{6!} + - \cdots$$

olur.

$x = 0$ noktası civarında üretilen Taylor Serilerine Maclaurin Serisi de denir.

f fonksiyonunun a noktasında ürettiği seri onun kısmi toplamı ile kalan terimin toplamı olarak yazıldığında, kısmi toplam

$$T_n(x,a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

biçiminde n. dereceden bir polinomdur. Bu polinoma f nin a noktasında ürettiği Taylor polinomu adı verilir.

ÖRNEK : $f(x) = e^x$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasında ürettiği Taylor polinomunu bulunuz.

Çözüm : $f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$ ve dolayısıyla $f^{(n)}(0) = 1$ olacağından, istenen polinom

$$T_n(x,0) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

olur.

$f(x)$ fonksiyonu ile bunun Taylor polinomları $x = a$ noktası civarında birbirlerine çok yakın değerler alırlar.

$$f(x) - T_n(x,a) = K_n(x,a) = K_n(x)$$

olsun. $K_n(x)$ ifadesine kalan terim, fark veya hata denir. Buna göre

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(0)}{k!}(x-a)^k + K_n(x)$$

yazılabilir. Bu ifadeye kalan terimli Taylor formülü adı verilir.

Kalan terimle ilgili olarak, Taylor tarafından verilen aşağıdaki teoremi ispatsız olarak veriyoruz.

TEOREM 10.21 (Taylor Teoremi) **:**
f fonksiyonu a noktasını ihtiva eden bir aralıkta $(n+1)$– inci mertebeden türevlenebilir olsun. Bu aralıktaki her x için

$$K_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

olmak üzere,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + K_n(x)$$

yazılabilir. Burada c, a ile x arasında bir sayıdır.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + K_n(x)$$

ifadesinde $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \lim_{n\to\infty}K_n(x)$$

bağıntısı bulunur. Buradan görüldüğü gibi, $\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ serisinin $f(x)$ değerine yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty}K_n(x) = 0$$

olmasıdır.

1. Aşağıda genel terimleri verilen serilerin yakınsaklık yarıçapı ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

a) x^n b) $(x+3)^n$ c) $(-1)^n(x-1)^n$

ç) $\dfrac{(x-2)^n}{n}$ d) $\dfrac{(x-1)^n}{10^n}$ e) $(3x)^n$

f) $\dfrac{nx^n}{n+1}$ g) $\dfrac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$ h) $\dfrac{(-1)^n x^n}{n!}$

ı) $\dfrac{nx^n}{2^n(n^2+1)}$ i) $\dfrac{x^n}{n\sqrt{n}\,3^n}$ j) $(\ln n)x^n$

k) $n!\,(x-2)^n$ l) $\dfrac{(x-2)^n}{n2^n}$ m) $\dfrac{n!x^n}{2^n}$

n) $\dfrac{x^{n-1}}{2n-1}$ o) $\dfrac{n!x^n}{(n+1)^n}$ ö) $(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}x^n$

2. Aşağıdaki serilerin yakınsaklık yarıçapları ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2.4\cdots(2n)}{1.3\cdots(2n-1)}x^{4n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)}{2n+1}x^{2n+1}$ ç) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n!\,x^{n!}$

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{2^n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}x^{3n}$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{2^n}$ g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n!}}{n!}$

3. Aşağıdaki serilerin yakınsaklık aralıklarını bulunuz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|x|}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-1\right)^n$ ç) $\displaystyle\sum\left(\frac{3}{2-x^2}\right)^n$

4. $\sum c_n x^n$ serisinin yakınsaklık yarıçapı R olduğuna göre, aşağıdaki serilerin yakınsaklık yarıçaplarını bulunuz.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}x^n$ b) $\displaystyle\sum\frac{(n!)^2}{(2n)!}c_n x^n$

c) $\sum c_n^2 x^n$ ç) $\sum c_n x^{2n}$

5. Her $x\in R$ için

$$\sin ax=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

olduğunu gösteriniz.

6. $f(x)=e^{x/3}$ fonksiyonu $(x-3)$ ün kuvvetlerine göre yazınız.

7. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\displaystyle\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $(|x|<1)$

b) $\displaystyle\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ $(-1<x\le 1)$

c) $\displaystyle\ln\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

ç) $\displaystyle\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(|x|<1)$

d) $\displaystyle a^x=\sum_{n=0}^{\infty}(\ln a)^n\frac{x^n}{n!}$ $(\forall x\in R)$

e) $\displaystyle\cos^2 x=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}$ $(\forall x\in R)$

f) $\displaystyle\sin^3 x=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ $(\forall x\in R)$

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots\sqrt[n]{n}\right)$

limitini hesaplayınız.

2. $\left(\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)$ dizisinin limitini bulunuz.

3. Genel terimi

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

olan dizinin limitini bulunuz.

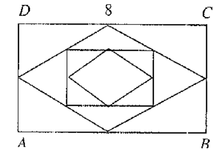
4. $\forall n\in N$ için $a_n>0$ ve $\lim a_n=a$ olsun.

$$\lim\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$$

olacağını gösteriniz.

5. Üç terimli bir aritmetik dizinin terimleri toplamı 27, terimlerin kareleri toplamı 293 olduğuna göre, bu dizinin en büyük terimi ile en küçük teriminin farkı kaçtır?

6.



ABCD eni 6 cm, boyu 8 cm olan bir dikdörtgendir. Diğer sonsuz çokluktaki dörtgenlerden herbirinin köşeleri, bir öncekinin kenarlarının orta noktalarıdır. Tüm dörtgenlerin çevreleri toplamı kaç cm dir?

7. $\sum a_n$ pozitif terimli yakınsak bir seri olsun. $\sum\dfrac{a_n}{n}$ serisinin de yakınsak olacağını gösteriniz.

8. $\sum a_n$ pozitif terimli bir yakınsak seri, (c_n) de pozitif terimli ve sıfıra yakınsayan bir dizi olsun. $\sum a_n c_n$ serisinin yakınsak olacağını gösteriniz. (c_n) pozitif terimli olmazsa $\sum a_n c_n$ yakınsak olur mu?

9. $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ pozitif terimli yakınsak seriler olsun. $\sum a_n b_n$ serisinin de yakınsak olacağını gösteriniz.

10. Aşağıdaki serilerin yakınsaklık durumlarını inceleyiniz.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+\cdots n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1^2+2^2+\cdots n^2}$

11. $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^p}$ serisinin $p>1$ için yakınsak $p\le 1$ için ıraksak olacağını gösteriniz.

12. Aşağıdaki serilerin yakınsaklık durumunu inceleyiniz.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{n\pi}}{\pi^{ne}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{1.3.5\cdots(2n-1)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$

ç) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

e) $\displaystyle\sum(-1)^n\frac{n!}{1.3.5\cdots(2n-1)}$

13. a) (a_n) monoton azalan bir sıfır dizisi olsun.

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right| \le a_{n+1}$$

olduğunu gösteriniz.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n(n+1)}$ serisi veriliyor. Bu serinin toplamı ilk beş teriminin toplamı ile yaklaşık olarak ifade edildiğinde yapılan hata en fazla ne olabilir?

14. Aşağıdaki serilerin yakınsaklık aralığını bulunuz.

a) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(2-\frac{2}{3}\right)\cdots\left(n-\frac{2}{3}\right)}$$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

15. Aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n} = 0$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2} = 0$

c) $\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{n^n} = 0$ $\quad(\forall x \in R$ için$)$

ç) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!\,x^n}{n^n} = 0$ $\quad(|x| < e$ için$)$

16. a ve b pozitif reel sayılar olduğuna göre

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$$

serisinin yakınsaklık yarıçapını ve yakınsaklık aralığını bulunuz.

17. $c \ge 0$ için $\sum(n+c^n)x^n$ serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

18. $p \in N$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!\,(n+p)!}$$

serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz.

19. Aşağıdaki serilerin yakınsaklık aralığını bulunuz.

a) $\sum_{k=1}^{\infty}(\ln k)^k x^k$ $\qquad$ b) $\sum_{k=1}^{\infty}k^{\ln k}x^k$

20. (r_k) k nın bir rasyonel fonksiyonu olsun.

$\sum c_k x^k$ ve $\sum c_k r_k x^k$ serilerinin aynı yakınsaklık yarıçapına sahip olacağını gösteriniz. Bu iki serinin yakınsaklık aralıkları aynı mıdır?

($r_k = \frac{P(k)}{Q(k)}$ olacak şekilde P ve Q polinomlarının varlığını düşününüz.)

21. α reel sayısı için

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \quad , \quad |x| < 1$$

olduğunu gösteriniz. Burada $\binom{\alpha}{n}$ binom katsayısı olup

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

dır. Bu açılımdan yararlanarak

a) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ $\qquad$ b) $(1+x)^{3/2}$ $\qquad$ c) $\frac{1}{(1+x)^3}$

ifadelerini Maclaurin serisine açınız.

22. Fonksiyonların seriye açılımından yararlanarak aşağıdaki eşitliklerin doğruluğunu gösteriniz.

a) $\lim_{x\to 0}\frac{e-e^{\cos x}}{x^2} = \frac{e}{2}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{\sin x}}{x^3} = \frac{1}{3}$

İNDEKS (DİZİN)